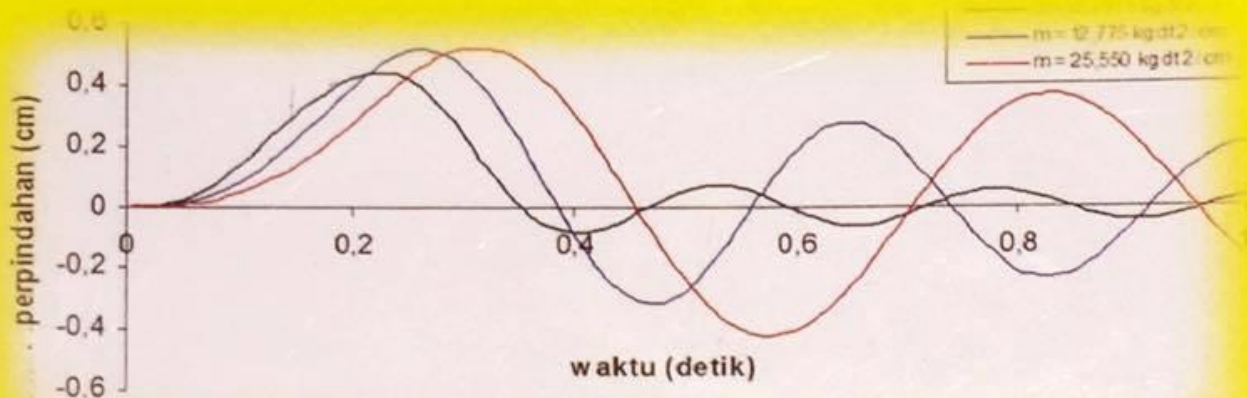


BUKU AJAR

DINAMIKA STRUKTUR

Teori dan Aplikasi

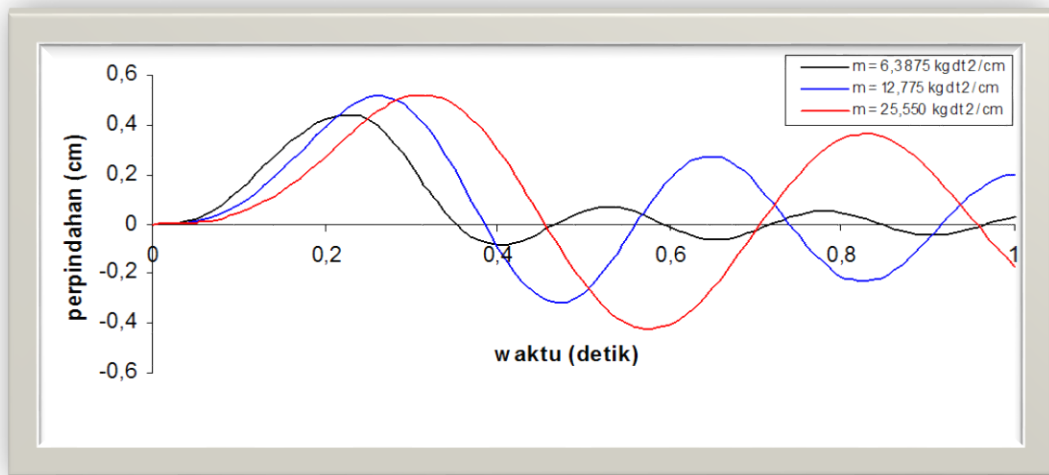


Reni Suryanita, Ph.D.

BUKU AJAR

DINAMIKA STRUKTUR

Teori dan Aplikasi



Oleh :

Reni Suryanita, Ph.D.

DAFTAR ISI

DAFTAR ISI.....	ii
DAFTAR GAMBAR	vii
DAFTAR TABEL.....	ix
KATA PENGANTAR	xi
TINJAUAN UMUM MATAKULIAH.....	xiii
BAB 1	1
SISTEM DERAJAT – KEBEBASAN TUNGGAL TIDAK TEREDAM.....	1
1.1. Derajat Kebebasan (Degrees Of Freedom).....	1
1.2. Sistem Tak Teredam (Undamped System).....	3
1.3. Susunan Pegas Paralel atau Seri	5
1.4. Persamaan Hukum Gerak Newton	7
1.5. Diagram Free Body (Free Body Diagram).....	9
1.6. Prinsip D’Alembert	9
1.7. Solusi Persamaan Diferensial Gerak	11
1.8. Frekuensi Dan Perioda	14
1.9. Amplitudo Gerak	16
1.10 Contoh Soal dan Penyelesaian.....	18
1.11 Rangkuman.....	29
1.12 Soal Latihan.....	30
BAB 2	32
SISTEM DERAJAT – KEBEBASAN TUNGGAL TEREDAM	32
2.1. Redaman Liat (Viscous Damping).....	32
2.2 Persamaan Gerak (Equation Of Motion).....	32
2.3 Sistem Redaman Kritis (Critically Damped System).....	34
2.4 Sistem Redaman Superkritis (Overdamped Sytem).....	36
2.5 Sistem Redaman Subkritis (Underdamped System)	37

2.6	Pengurangan Logaritmis.....	40
2.7	Contoh Soal dan Penyelesaian.....	42
2.8	Rangkuman.....	50
2.9	Soal Latihan.....	50
BAB 3		52
RESPONS SISTEM BERDERAJAT KEBEBASAN TUNGGAL TERHADAP PEMBEBANAN HARMONIS		52
3.1.	Pengaruh Harmonis Tak Teredam (Undamped Harmonic Excitation)	52
3.2.	Pengaruh Harmonis Teredam (Damped Harmonic Excitation)	54
3.3.	Evaluasi Redaman Pada Saat Resonansi	57
3.4.	Metoda Band Width Untuk Evaluasi Redaman	58
3.5.	Respons Dari Gerakan Penyokong (Response To Support Motion).....	59
3.6.	Penyaluran Gaya Ke fondasi	62
3.7.	Instrumen Gempa (Seismic Instrument).....	63
3.8	Contoh Soal dan Penyelesaian.....	65
3.9	Rangkuman.....	73
3.10	Soal latihan	74
BAB 4		77
RESPONS SISTEM BERDERAJAT KEBEBASAN TUNGGAL TERHADAP PEMBEBANAN DINAMIS		77
4.1.	Pembebanan Impuls Dan Integrasi Duhamel (Impulsive Loading And Duhamel's Integral)	77
4.2.	Gaya Konstan	78
4.3	Evaluasi Numerik Dari Integral Duhamel Untuk Sistem Tak Teredam.....	82
4.4	Evaluasi Numerik Integral Duhamel Untuk Sistem Teredam.....	84
4.5	Evaluasi Numerik Integral Duhamel Untuk Sistem Teredam dengan Berbagai Variasi Beban.....	86
4.6	Contoh Soal dan Penyelesaian.....	90
4.7	Rangkuman.....	126
4.8	Soal Latihan.....	127

BAB 5	128
SISTEM DERAJAT – KEBEBASAN BANYAK.....	128
<i>(MULTI DEGREE OF FREEDOM)</i>	128
5.1. Matriks Fleksibilitas	128
5.2. Matriks Kekakuan	129
5.3. Contoh Soal dan Penyelesaian.....	131
5.4. Rangkuman.....	135
5.5. Soal Latihan.....	136
BAB 6	137
RESPON SISTEM BERDERAJAT KEBEBASAN BANYAK (MDOF) TERHADAP PEMBEBANAN DINAMIS.....	137
6.1 Analisis Respon Dinamik Sistem MDOF dengan Metode Newmark – β	137
6.2 Pembebanan Dinamis	143
6.2.1. Beban Segitiga	143
6.2.2. Beban Segiempat.....	143
6.2.3. Beban <i>Ramp</i>	144
6.2.4. Beban Sinusoidal.....	145
6.3 Contoh Soal dan Penyelesaian.....	145
6.3.1. Beban Sinusoidal.....	154
6.3.2. Beban Segitiga	165
6.3.3. Beban Segiempat.....	177
6.3.4. Beban <i>Ramp</i>	188
6.4 Rangkuman.....	200
6.5 Soal Latihan.....	203
BAB 7	205
RESPON DINAMIS STRUKTUR BERDASARKAN GRAFIK SPEKTRUM RESPONS	205
7. 1. Bentuk Spektrum Respons (Construction Of Response Spectrum)	205
7. 2. Spektrum Respons Untuk Penyokong/Fondasi yang Tergantung/Bergerak	209

7. 3. Spektrum Respons Dengan Tiga Besaran	210
7. 4. Spektrum Respons Kota-kota Indonesia Berdasarkan SNI 1726-2012....	213
7. 5. Contoh Soal dan Penyelesaian.....	213
7. 6. Rangkuman.....	224
7. 7. Soal Latihan.....	225
Daftar Pustaka	226
GLOSARIUM.....	227
INDEKS	228

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1. 1 Struktur yang dimodelisasikan sebagai sistem SDOF.....	2
Gambar 1. 2 Frame yang dimodelisasikan sebagai sistem SDOF	2
Gambar 1. 3 Model matematis untuk sistem berderajat kebebasan tunggal.....	3
Gambar 1. 4 Hubungan gaya statis F_s dan perpindahan u	4
Gambar 1. 5 Susunan pegas: (a) paralel, (b) seri	5
Gambar 1. 6 Diagram <i>free body</i> gaya luar dan gaya inersia	10
Gambar 1. 7 Dua osilator sederhana dan diagram <i>free body</i> -nya	10
Gambar 1. 8 Definisi sudut α	17
Gambar 1. 9 Respons getaran bebas tak teredam.....	17
Gambar 2. 1 Osilator redaman liat dan <i>diagram free body</i>	34
Gambar 2. 2 Respons getar bebas dengan redaman kritis.....	36
Gambar 2. 3 Respons getaran bebas untuk sistem redaman subkritis.....	40
Gambar 2. 4 Perpindahan puncak dan perpindahan pada titik tangensial.....	41
Gambar 3. 1 Osilator teredam secara harmonis dan diagram <i>free body</i>	55
Gambar 3. 2 Osilator sederhana teredam secara harmonis dan Diagram <i>free body</i> 60	
Gambar 3. 3 Model seismograph pengukur besaran gempa bumi	64
Gambar 4. 1 Fungsi gaya impuls umum	77
Gambar 4. 2 Gaya tetap yang bekerja pada osilator tak teredam.....	79
Gambar 4. 3 Idealisasi struktur derajat kebebasan tunggal	87
Gambar 4. 4 Beban segitiga	87
Gambar 4. 5 Beban segitiga yang lainnya.....	88
Gambar 4. 6 Beban segiempat	88
Gambar 4. 7 Beban trapesium.....	89
Gambar 4. 8 Beban Sinusoidal.....	89
Gambar 4. 9 Accelerogram Gempa El Centro	90
Gambar 5. 1 Ilustrasi Balok Sederhana.....	128
Gambar 5. 2 Ilustrasi Balok yang Mengalami Rotasi Akibat Kekakuan	130
Gambar 5. 3 Portal 3 Derajat Kebebasan	132
Gambar 5. 4 Sistem 4 DOF dan Kalkulasi Koefisien Kekakuan Kolom.....	134

Gambar 6. 1 Bagan Alir Tahap Perhitungan Respon Sistem MDOF	141
Gambar 6. 2 Bagan Alir Metode <i>Newmark</i> – β	142
Gambar 6. 3 Grafik Fungsi Gaya Pola Beban Segitiga.....	143
Gambar 6. 4 Grafik Fungsi Gaya Pola Beban Segiempat.....	144
Gambar 6. 5 Grafik Fungsi Gaya Pola Beban <i>Ramp</i>	144
Gambar 6. 6 Grafik Fungsi Gaya Beban <i>Sinusoidal</i>	145
Gambar 7. 1 Osilator sederhana tak teredam dipengaruhi beban $F(t)$	207
Gambar 7. 2 Spektrum respons setengah gaya sinusoidal dengan selang waktu t_d	208
Gambar 7. 3 Osilator sederhana teredam yang dipengaruhi pada penyokongnya. .	209
Gambar 7. 4 Fungsi percepatan yang mempengaruhi penyokong dari osilator	209
Gambar 7. 5 Spektrum respons perpindahan akibat gempa di El Centro 1940	212
Gambar 7. 6 Parameter S_s , Gempa Maksimum (MCE_R), Kelas Situs SB	216
Gambar 7. 7 Parameter S_I , Gempa Maksimum (MCE_R), Kelas Situs SB	217
Gambar 7. 8 Parameter PGA , Gempa Maksimum (MCE_G), Kelas Situs SB	218
Gambar 7. 9 Spektrum Respons Desain untuk Kota Banda Aceh	221
Gambar 7. 10 Spektrum Respons Desain untuk Kota Medan.....	223
Gambar 7. 11 Spektrum Respons Desain untuk Kota Pekanbaru.....	223
Gambar 7. 12 Spektrum Respons Desain untuk Kota Padang	224

DAFTAR TABEL

Tabel 4. 1	Perhitungan numerik dari respons untuk Contoh 4.1.....	91
Tabel 4. 2	Hasil hitungan perpindahan dengan Integral Duhamel.....	93
Tabel 4. 3	Hasil hitungan perpindahan secara manual.....	97
Tabel 4. 4	Hasil hitungan perpindahan dengan SAP 2000	102
Tabel 4. 5	Perhitungan perpindahan manual, Integral Duhamel dan SAP2000.....	108
Tabel 6. 1	Variasi Massa dan Kekakuan.....	146
Tabel 6. 2	Rekapitulasi Respon Maksimum Sistem	200
Tabel 6. 3	Rekapitulasi Parameter yang Mempengaruhi Respon Sistem	202
Tabel 7. 1	Perhitungan Parameter Percepatan Desain (S_d) Kota Banda Aceh.....	222

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah puji dan syukur dipanjatkan kehadirat Allah SWT karena akhirnya penulis dapat menyelesaikan buku ajar yang berjudul Dinamika Struktur Teori dan Aplikasi. Buku ajar ini merupakan edisi pertama sehingga kemungkinan kekurangan di sana sini masih akan banyak dijumpai. Kritik dan saran yang membangun untuk perbaikan buku ajar ini sangat penulis harapkan.

Buku ajar matakuliah Dinamika Struktur ini ditujukan bagi mahasiswa semester atas yaitu di atas Semester 6 pada Program S1 maupun mahasiswa Program S2 Teknik Sipil agar dapat dijadikan pegangan dan panduan dalam mengikuti tatap muka perkuliahan di kelas dan pegangan bagi mahasiswa untuk dapat belajar mandiri. Materi tingkat lanjut pada buku ini dapat dimodifikasi dan dikembangkan bagi mahasiswa Tugas Akhir dengan bidang Keahlian Struktur Teknik Sipil. Selain itu buku ini juga dapat dijadikan acuan dan referensi bagi dosen dalam menyampaikan materi perkuliahan.

Adapun naskah buku ajar ini terdiri dari 7 (tujuh) bab, yang berisi uraian umum tentang sistem berderajat kebebasan tunggal tidak teredam, sistem berderajat kebebasan tunggal teredam, respon sistem berderajat kebebasan tunggal terhadap pembebanan harmonis, respon sistem berderajat kebebasan tunggal terhadap pembebanan dinamis, sistem berderajat kebebasan banyak, respon sistem berderajat kebebasan banyak terhadap pembebanan dinamis, dan respon dinamis struktur berdasarkan grafik spektrum respon. Materi disajikan dalam bentuk teori dan contoh soal serta penyelesaiannya. Setiap akhir bab pembahasan diikuti dengan soal latihan

dengan harapan mahasiswa dapat lebih memahami materi dengan cara menyelesaikan kasus yang diberikan.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan berbagai pihak mulai dari proses penyusunan hingga penerbitan buku ajar ini, yaitu kepada: Lembaga Pengembangan dan Penjaminan Mutu Pendidikan (LPPMP) Universitas Riau, mahasiswa Tugas Akhir kelompok penelitian Pemodelan Struktur dan Dinamika Struktur Program Studi S1 Teknik Sipil angkatan 2011 dan angkatan 2012, Vomania dan Puri Awanda Cantikawati yang telah bersedia menjadi juru ketik selama proses penyusunan materi serta Unri Press yang telah menerbitkan buku ajar ini.

Semoga kehadiran buku ajar ini dapat mempermudah mahasiswa dalam memahami Dinamika Struktur. Penulis juga mengharapkan buku ajar ini dapat memberikan manfaat bagi pembacanya.

Pekanbaru, 15 Oktober 2016

Penulis

TINJAUAN UMUM MATAKULIAH

Matakuliah Dinamika Struktur merupakan salah satu matakuliah wajib yang ditawarkan pada semester atas (Semester 6 dan Semester 7) untuk mahasiswa Program Sarjana Teknik Sipil di Perguruan Tinggi Negeri maupun Swasta di Indonesia. Matakuliah ini juga ditawarkan kepada mahasiswa Program Magister Teknik Sipil kelompok bidang keahlian Struktur, dengan bobot 2 SKS. Untuk Program Studi Magister Teknik Sipil, Matakuliah Dinamika Struktur bersifat lanjutan, sehingga materi Contoh Soal dan Penyelesaian yang ditawarkan dalam buku ini dapat digunakan dan diterapkan untuk kasus yang lebih riil dengan menggunakan Software Elemen Hingga.

Adapun tujuan pemberian matakuliah ini kepada mahasiswa Program Studi Sarjana maupun Magister Teknik Sipil, sebagai berikut: .

1. Melatih kemampuan mahasiswa dalam memformulasi persamaan gerak sistem struktur sederhana, menghitung frekuensi dan perioda natural sistem dan struktur dengan analisis respon getaran bebas.
2. Melatih mahasiswa untuk mampu mendefinisikan fenomena-fenomena dinamika secara fisik.
3. Melatih mahasiswa untuk mampu membuat model matematika dari masalah-masalah teknis yang ada dan mencari solusinya dengan berbagai metode persamaan diferensial matematika.

4. Melatih mahasiswa untuk dapat memodelkan, mendesain dan menganalisis respon struktur meliputi perpindahan, kecepatan dan percepatan struktur akibat berbagai pembebanan dinamis.

Pada mata kuliah ini akan dipelajari materi dinamika struktur dan pengantar rekayasa gempa sebagai satu kesatuan. Pada bagian awal diberikan pengetahuan tentang sistem struktur yang dibebani oleh beban dinamik dengan berbagai kondisi pembebanan. Pada bagian kedua diberikan pengetahuan rekayasa gempa, respons struktur akibat beban gempa dan perhitungan beban gempa statik ekuivalen serta konsep dan aplikasi desain perilaku gempa Indonesia.

Buku ajar ini juga difokuskan kepada pembahasan teori dan aplikasi persamaan gerak dinamis sistem berderajat kebebasan tunggal (*Single Degree of Freedom*) dan sistem berderajat kebebasan banyak (*Multi Degree of Freedom*) dalam bidang rekayasa struktur Teknik Sipil. Dalam penerapan aplikasinya, mahasiswa dipandu untuk mengerjakan tugas secara mandiri ataupun berkelompok.

Pemberian evaluasi hasil belajar mahasiswa oleh dosen dapat dilakukan melalui presentasi tugas, nilai quis, tugas terstruktur, ujian tengah semester dan ujian akhir semester. Diharapkan melalui buku ini mahasiswa dapat menambah pemahaman dan pengetahuan tentang Dinamika Struktur dan buku ini dapat dijadikan sebagai pegangan dalam mengikuti tatap muka di kelas.

BAB 1

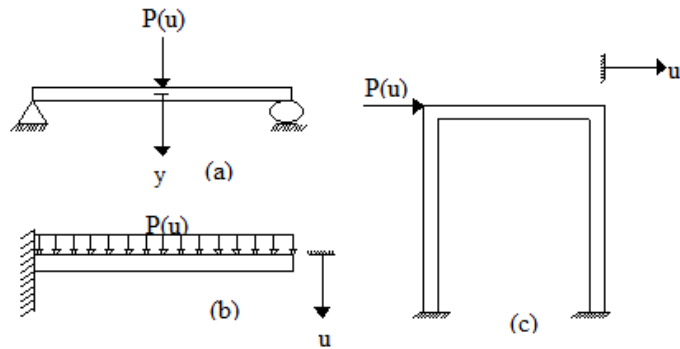
SISTEM DERAJAT – KEBEBASAN TUNGGAL TIDAK TEREDAM

1.1. Derajat Kebebasan (*Degrees Of Freedom*)

Materi awal perkuliahan Dinamika Struktur akan membahas tentang derajat kebebasan suatu struktur. Derajat kebebasan struktur merupakan derajat kebebasan yang diperlukan untuk menyatakan posisi suatu sistem pada setiap saat. Pada umumnya pada sistem berderajat tunggal, setiap titik atau massa hanya diperhitungkan berpindah tempat dalam satu arah horizontal saja.

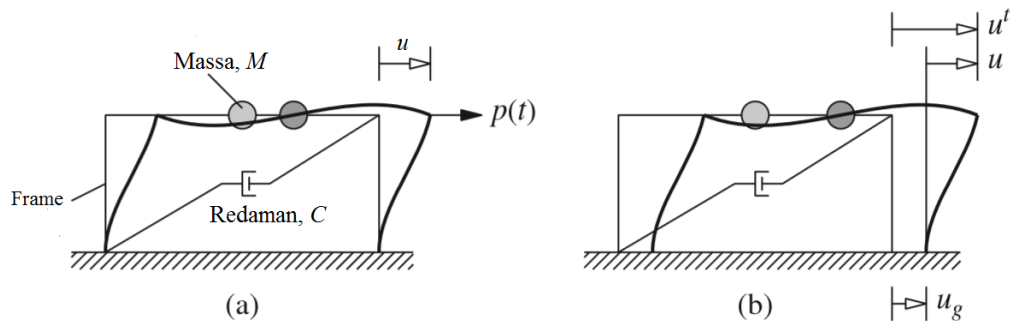
Umumnya struktur berkesinambungan dengan jumlah derajat kebebasan tidak berhingga. Namun suatu struktur dapat direduksi derajat kebebasannya melalui proses idealisasi model matematis. Dengan idealisasi model matematis jumlah derajat kebebasan struktur menjadi suatu jumlah diskrit (terbatas). Bahkan dalam keadaan tertentu dapat menjadi berderajat kebebasan tunggal (*Single Degree of Freedom, SDOF*). Dalam buku teks Mario Paz (1996) diuraikan materi SDOF dengan contoh struktur berderajat kebebasan tunggal seperti terlihat pada Gambar 1.1. Contoh struktur pada Gambar 1.1. dapat dianggap sebagai struktur berderajat kebebasan tunggal dalam analisis dinamis karena sistem tersebut dimodelisasikan sebagai sistem dengan satu koordinat perpindahan yang disimbolkan u . Sedangkan dalam buku teks Chopra (2012), struktur frame dengan massa M dan diberi redaman sebesar C akan berpindah akibat gaya $p(t)$ sejauh perpindahan u . Struktur seperti ini

dianggap berderajat kebebasan tunggal dengan satu perpindahan lateral yaitu u seperti yang terlihat dalam Gambar 1.2.



Gambar 1. 1 Struktur yang dimodelisasikan sebagai sistem SDOF

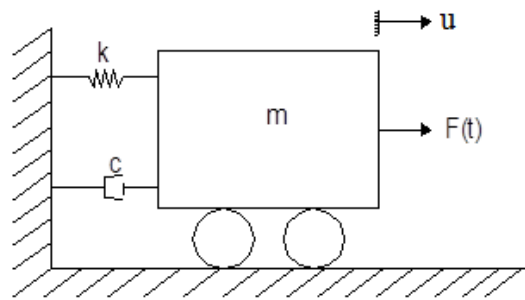
Seandainya struktur mengalami perpindahan akibat adanya percepatan gempa sebesar u_g maka frame akan berpindah sebesar u^t .



Gambar 1. 2 Frame yang dimodelisasikan sebagai sistem SDOF

Sistem berderajat kebebasan tunggal ini dapat dijelaskan secara tepat dengan model matematis pada Gambar 1.3 yang mempunyai elemen – elemen: massa m menyatakan massa dan sifat inersia dari struktur, pegas k yang menyatakan gaya pegas elastisitas dan kapasitas energi potensial dari struktur, redaman c yang

menyatakan sifat geseran dan kehilangan energi dari struktur serta gaya $F(t)$ untuk menyatakan gaya luar yang bekerja pada sistem struktur dengan berdasarkan fungsi waktu. Dengan demikian dapat dikatakan tiap elemen dalam satu sistem menyatakan satu sifat khusus, yaitu massa m yang menyatakan sifat khusus inersia, pegas k menyatakan elastisitas dan peredam c menyatakan kehilangan energi. Harus kita pahami bahwa elemen tersebut tidak terdapat dalam bentuk fisik, namun model matematis ini hanya merupakan konsep idealisasi dari struktur yang sebenarnya. Melalui model matematis kita dapat menyelesaikan persamaan matematis yang menggambarkan sifat dinamis dari sistem tersebut.

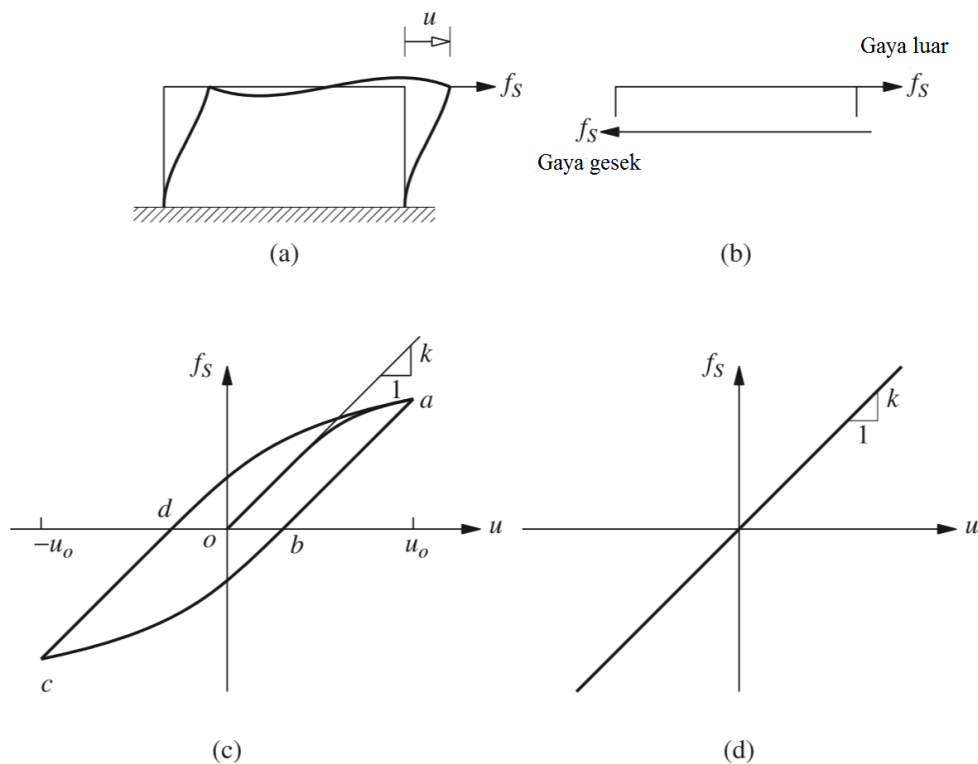


Gambar 1. 3 Model matematis untuk sistem berderajat kebebasan tunggal.

1.2. Sistem Tak Teredam (*Undamped System*)

Sistem berderajat kebebasan tunggal tak teredam sering digambarkan dengan osilator sederhana bermassa m yang dihubungkan dengan pegas k yang ditarik dengan gaya sebesar $F(t)$ tanpa adanya redaman C seperti pada Gambar 1.3. Pada model matematis seperti ini, pergerakan massa m dihalangi oleh pegas k yang bergerak berlawanan arah dengan gaya $F(t)$ pada bidang lurus.

Hubungan gaya dengan perpindahan dijelaskan oleh Chopra (2012) dalam bukunya seperti terlihat pada Gambar 1.4. Jika sistem tidak menerima pembebanan dinamik, dimana gaya yang bekerja pada sistem tidak berdasarkan fungsi waktu maka gaya tersebut disebut gaya statis. Besarnya gaya statis yang bekerja pada sistem yang menyebabkan perpindahan sebesar u disimbolkan dengan F_s seperti terlihat pada Gambar 1.4a. Besarnya gaya gesek f_s yang menahan perpindahan u sama dengan gaya F_s akibat beban dari luar sistem (Gambar 1.4b), namun arah keduanya berlawanan. Hubungan perpindahan u dengan gaya F_s membentuk garis lurus linear pada kondisi deformasi yang kecil, namun jika terjadi deformasi yang besar dimana perpindahan u lebih besar dari gaya F_s maka hubungannya menjadi nonlinear. Kedua hubungan ini dapat kita lihat pada Gambar 1.4c dan 1.4d.



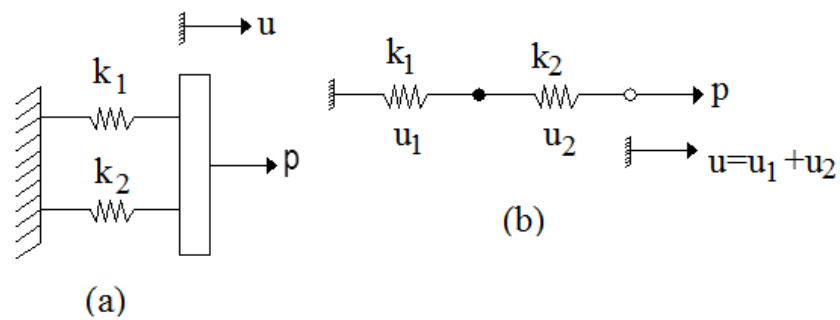
Gambar 1. 4 Hubungan gaya statis F_s dan perpindahan u .

Dengan demikian kita dapat menuliskan hubungan antar gaya dan perpindahan pegas linier dalam Persamaan (1.1) berikut:

$$F_s = ku \quad (1.1)$$

1.3. Susunan Pegas Paralel atau Seri

Besarnya kekakuan suatu sistem dapat digambarkan dengan susunan pegas paralel ataupun seri seperti yang terlihat pada Gambar 1.5.



Gambar 1. 5 Susunan pegas: (a) paralel, (b) seri

Pada Gambar 1.5 susunan pegas paralel, sehingga dapat kita nyatakan kekakuan total pegas atau kekakuan ekuivalen (k_e) pegas sebesar:

$$k_e = k_1 + k_2 \quad (1.2)$$

Kekakuan ekuivalen untuk n pegas yang dipasang paralel dapat dinyatakan dalam Persamaan (1.3)

$$k_e = \sum_{i=1}^n k_i \quad (1.3)$$

Sedangkan untuk dua pegas yang dipasang seri seperti pada Gambar 1.5 (b), dapat dinyatakan nilai perpindahan merupakan hasil gaya P dibagi kekakuan k. Perpindahan relatif u_1 dan u_2 pada pegas masing-masing sebesar :

$$u_1 = \frac{P}{k_1} \qquad u_2 = \frac{P}{k_2}$$

Sedangkan perpindahan total u yang terjadi pada pegas adalah $u = u_1 + u_2$ atau

$$u = \frac{P}{k_1} + \frac{P}{k_2} \quad (1.4)$$

Dengan demikian, melalui Persamaan (1.4) dapat dinyatakan besarnya konstanta pegas ekivalen untuk membuat satu unit perpindahan (u), yaitu sebesar:

$$k_e = \frac{P}{u}$$

Dengan mensubstitusikan u dari persamaan di atas ke dalam Persamaan (1.4), kita dapatkan harga kebalikan dari konstanta pegas sebesar

$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad (1.5)$$

Jika terdapat sejumlah n pegas yang terpasang seri, maka besarnya konstanta pegas ekivalen dapat kita nyatakan sebagai berikut:

$$\frac{1}{k_e} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \quad (1.6)$$

1.4. Persamaan Hukum Gerak Newton

Pembahasan selanjutnya tentang osilator sederhana seperti pada Gambar 1.3, yang bergerak sehingga timbul perpindahan atau kecepatan massa m pada saat t dan untuk kondisi awal pada saat $t = 0$. Hubungan analitis antara perpindahan u dan waktu t diberikan oleh hukum Newton Kedua untuk gerak yang dapat ditulis sebagai berikut:

$$F = ma \tag{1.7}$$

Dimana F merupakan resultan gaya yang bekerja pada partikel massa m , sedangkan a adalah resultan percepatan. Persamaan (1.7) merupakan persamaan vektor yang dapat ditulis dalam bentuk penjumlahan ekivalen, dalam besaran komponennya menurut sumbu koordinat x , y dan z sebagai berikut:

$$\sum F_x = ma_x \tag{1.8a}$$

$$\sum F_y = ma_y \tag{1.8b}$$

$$\sum F_z = ma_z \tag{1.8c}$$

Percepatan didefinisikan sebagai turunan kedua vektor posisi terhadap waktu; dengan kata lain, Persamaan (1.8) merupakan persamaan diferensial. Persamaan yang menggunakan Hukum Newton kedua ini hanya dapat digunakan untuk benda idealis seperti partikel yang bermassa tetapi tidak bervolume selain itu hukum Newton dapat juga digunakan pada benda berdimensi yang bergerak.

Benda kaku yang bergerak pada sebuah bidang adalah simetris terhadap bidang gerak (bidang $x - z$) yang mengakibatkan perlunya modifikasi hukum gerak Newton menjadi

$$\sum F_x = m(a_G)_x \quad (1.9a)$$

$$\sum F_y = m(a_G)_y \quad (1.9b)$$

$$\sum M_G = I_G \alpha \quad (1.9c)$$

Pada persamaan di atas $(a_G)_x$ dan $(a_G)_y$ adalah komponen percepatan sepanjang sumbu x dan y dari pusat benda yang bermassa G , dan α adalah percepatan sudut, I_G adalah momen inersia massa terhadap sumbu melalui pusat massa G dan $\sum M_G$ adalah jumlah momen gaya yang bekerja pada benda terhadap sumbu melalui pusat massa G yang tegak lurus pada bidang $x - y$. Persamaan (1.9) juga dapat dipakai untuk gerak rotasi suatu benda terhadap satu sumbu tetap. Untuk suatu bentuk gerak bidang yang khusus, Persamaan. (1.9c) dapat diganti dengan

$$\sum M_0 = I_0 \alpha \quad (1.9d)$$

Di mana momen inersia massa I_0 dan momen gaya M_0 ditinjau terhadap suatu sumbu rotasi tetap. Gerakan umum dari suatu benda kaku ditentukan oleh dua persamaan vektor dimana persamaan pertama adalah antara gaya dan percepatan dari pusat massa dan yang lain adalah antara gaya dan gerak sudut (*angular motion*) dari benda. Pernyataan persamaan terakhir adalah komponen skalar agak rumit, tetapi jarang diperlukan dalam dinamika struktur.

1.5. Diagram Free Body (Free Body Diagram)

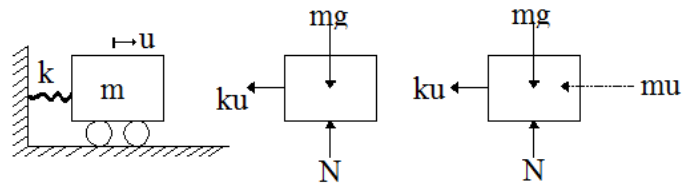
Diagram *free body* (DFB) adalah suatu sketsa dari benda yang dipisahkan dari benda yang lainnya, dimana semua gaya luar pada benda terlihat jelas. Sebagai contoh Gambar 1.6(b) menggambarkan DFB dari massa asilator m yang bergerak pada arah positif menurut koordinat sebesar perpindahan u , mengakibatkan gaya pada pegas sebesar $F_s = k.u$ (anggap pegas linier). Berat dari benda m_g dan reaksi normal N dari permukaan penyokong diperlihatkan juga untuk pelengkap meskipun gaya-gaya ini bekerja pada arah vertikal dan tak termasuk dalam persamaan gerak yang ditulis menurut arah u . Penggunaan hukum gerak Newton memberikan,

$$-ku = m\ddot{u} \quad (1.10)$$

Dimana gaya pegas bekerja pada arah negatif mempunyai tanda minus dan percepatan dinyatakan oleh \ddot{u} . Pada notasi ini, dua titik di atas u menyatakan turunan kedua terhadap waktu dan satu titik di atas u menyatakan turunan terhadap waktu, yaitu kecepatan (\dot{u})

1.6. Prinsip D'Alembert

Sebuah alternatif pendekatan untuk mendapatkan Persamaan (1.10) adalah penggunaan Prinsip D'Alembert yang menyatakan bahwa sebuah sistem dapat dibuat dalam keadaan keseimbangan dinamis dengan menambahkan sebuah gaya fiktif pada gaya-gaya luar yang biasanya dikenal sebagai gaya inersia.

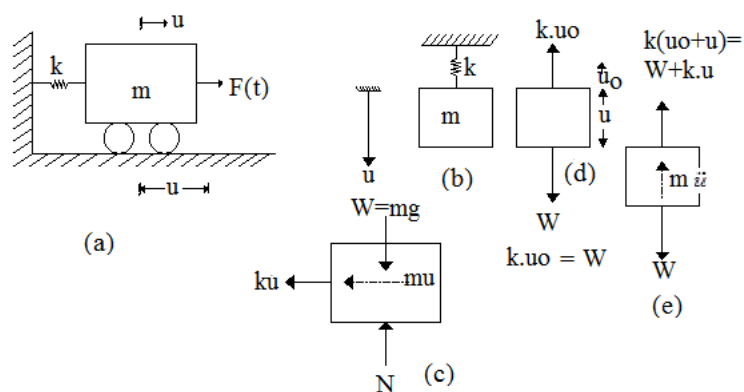


Gambar 1. 6 Diagram *free body* gaya luar dan gaya inersia

Pada Gambar 1.6(c) dapat kita lihat DFB dengan gaya inersia $m\ddot{u}$ yang sama dengan massa dikalikan percepatan dan selalu diberikan arah negatif terhadap koordinat yang bersangkutan. Penggunaan Prinsip D'Alembert memungkinkan pemakaian persamaan keseimbangan untuk mendapatkan persamaan gerak. Kalau kita diperhatikan Gambar 1.6(c), jumlah gaya-gaya pada arah u dapat dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$m\ddot{u} + ku = 0 \tag{1.11}$$

Untuk lebih jelasnya penguraikan persamaan diferensial di atas dapat digambarkan dengan kasus pergerakan osilator sederhana pada Gambar 1.7 berikut.



Gambar 1. 7 Dua osilator sederhana dan diagram *free body*-nya

Free body pada Gambar 1.7(c) dengan persamaan kesetimbangan sama dengan nol maka didapatkan persamaan sebagai berikut,

$$m\ddot{u} + ku = 0 \quad (\text{a})$$

Ketika benda pada Gambar 1.7(d) dalam posisi seimbang statis, pegas tertarik sejauh u_0 unit dan mengakibatkan gaya $ku_0 = W$ ke atas pada benda tersebut, di mana W adalah berat benda. Bila benda berpindah sejauh u ke bawah dari posisi seimbang maka besar gaya pegas diberikan oleh $F_s = k(u_0 + u)$ atau $F_s = W + ku$, sebab $ku_0 = W$. Hasil ini dipakai pada benda Gambar 1.7(e) dan dengan hukum Newton kedua untuk gerak didapat

$$-(W + ku) + W = m\ddot{u}$$

atau

$$m\ddot{u} + ku = 0 \quad (\text{b})$$

Persamaan (b) ini identik dengan Persamaan (a) di atas. Dengan demikian hukum kesetimbangan menggunakan osilator dan dengan penentuan free body menghasilkan persamaan gerak tanpa redaman yang sama.

1.7. Solusi Persamaan Diferensial Gerak

Pada bagian ini kita akan mendalami bagaimana solusi persamaan diferensial pada Persamaan (1.11). Untuk itu kita menggunakan pendekatan sistematis yang dimulai dengan mengklasifikasikan persamaan diferensial tersebut. Oleh karena

variabel bebas u dan turunan keduanya \ddot{u} berderajat satu pada Persamaan (1.11) maka persamaan ini diklasifikasikan linier orde kedua. Persamaan ini mengandung konstanta u , \ddot{u} , k dan m di sisi sebelah kiri dan sisi sebelah kanan sama dengan nol maka persamaan ini dapat diklasifikasikan ke dalam persamaan homogen dengan koefisien konstan. Kita ingat kembali bahwa ada cara umum untuk memecahkan persamaan diferensial linier (*homogen* atau *non homogen*) dari setiap orde. Untuk persamaan diferensial orde kedua kita selesaikan dengan cara mencoba-coba solusi sebagai berikut,

$$u = A \cos \omega t \quad (1.12)$$

atau

$$u = B \sin \omega t \quad (1.13)$$

Di mana A dan B adalah konstanta yang tergantung pada kondisi awal gerak dan ω adalah besaran yang menyatakan besaran fisik sistem seperti yang akan terlihat nanti. Substitusi Persamaan (1.12) ke dalam Persamaan (1.11) sehingga persamaan dapat ditulis sebagai berikut,

$$(-m\omega^2 + k)A \cos \omega t = 0 \quad (1.14)$$

Bila persamaan ini benar untuk setiap besaran waktu, maka faktor yang di dalam tanda kurung sama dengan nol, atau

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (1.15)$$

Akar positif dari Persamaan (1.15)

$$\omega = \sqrt{k/m} \quad (1.16a)$$

Persamaan (1.16a) ini kita kenal sebagai frekuensi natural (*natural frequency*) dari sistem. Selanjutnya Persamaan (1.16a) di atas dapat dinyatakan sebagai hasil perpindahan statis dengan berat $W = m \cdot g$ pada pegas. Dengan mensubstitusikan $m = W/g$ ke dalam persamaan (1.16a) maka dihasilkan,

$$\omega = \sqrt{\frac{k \cdot g}{W}} \quad (1.16b)$$

Sehingga,

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{u_{st}}} \quad (1.16c)$$

Dimana $u_{st} = W/k$ merupakan perpindahan statis pegas akibat berat W

Dengan menggunakan asumsi Persamaan (1.12) dan (1.13) ke dalam Persamaan (1.11) dan diperoleh solusi persamaan diferensial linier, maka superposisi kedua solusi ini seperti pada Persamaan (1.17) merupakan solusi persamaan diferensial orde dua dan mempunyai dua konstanta integrasi A dan B.

$$u = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (1.17)$$

Kecepatan \dot{u} didapat dengan mendiferensialkan Persamaan (1.17) terhadap waktu, yaitu

$$\dot{u} = -A \omega \sin \omega t + B \omega \cos \omega t \quad (1.18)$$

Selanjutnya perlu ditentukan konstanta integrasi A dan B. Kedua konstanta ini dapat ditentukan dari perpindahan u_0 dan kecepatan v_0 pada kondisi awal yaitu pada

saat $t = 0$. Kedua kondisi ini disebut kondisi awal (*initial conditions*) dan masalah pemecahan persamaan diferensial dengan kondisi awal disebut problem harga awal (*initial value problem*)

Sesudah substitusi harga $u = u_0$ dan $\dot{u} = v_0$ pada saat $t = 0$ pada Persamaan (1.17) dan (1.18) kita dapatkan

$$u_0 = A \tag{1.19a}$$

$$v_0 = B \omega \tag{1.19b}$$

Dengan substitusi Persamaan (1.19a) dan (1.19b) ke dalam Persamaan (1.17) memberikan:

$$u = u_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \tag{1.20}$$

Persamaan (1.20) merupakan persamaan untuk mendapatkan perpindahan u dari osilator sederhana sebagai fungsi variabel waktu t , dengan demikian solusi persamaan struktur model osilator sederhana dengan derajat kebebasan tunggal telah diselesaikan.

1.8. Frekuensi Dan Perioda

Persamaan (1.20) yang telah kita pelajari menyatakan bahwa gerak yang ditimbulkan adalah harmonis dan oleh karena itu pola pergerakannya secara periodik. Dengan demikian fungsi geraknya dapat dinyatakan dengan fungsi sinus

(sinusoidal) atau cosinus (cosinusoidal). Besarnya frekuensi yang ditimbulkan sebesar ω dengan periode 2π . Periode T dari gerak ditentukan oleh

$$\omega T = 2\pi$$

atau

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (1.21)$$

Periode biasanya dinyatakan dalam detik per siklus ataupun detik. Periode merupakan lamanya waktu yang diperlukan untuk terjadinya 1 getaran. Sedangkan frekuensi adalah banyaknya getaran (siklus) yang terjadi dalam 1 detik. Periode natural (T_n) adalah periode alami dari suatu struktur, terjadi akibat berat sendiri struktur tersebut. Kebalikan persamaan untuk periode natural adalah frekuensi natural (*natural frequency*) f , yang diuraikan dari Persamaan (1.21).

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (1.22)$$

Frekuensi natural f selalu dinyatakan dalam siklus per detik. Sebab besar ω berbeda dengan frekuensi natural f karena faktor konstan 2π , maka ω juga sering dianggap sebagai frekuensi natural. Untuk membedakan kedua pernyataan frekuensi natural itu, ω dapat dikatakan sebagai frekuensi natural sudut atau gerak lingkaran. Hal ini sering dapat diketahui dari unit/dimensi yang digunakan. Frekuensi natural f diukur dalam siklus per detik sedangkan frekuensi gerak lingkaran ω selalu diberikan dalam radian per detik (rad/detik).

1.9. Amplitudo Gerak

Persamaan (1.20) sebagai solusi gerak getaran bebas dari osilator tak teredam. Dengan transformasi sederhana trigonometrik dapat dilihat bahwa bentuk ekivalen dari persamaan itu adalah

$$y = C \sin(\omega t + \alpha) \quad (1.23)$$

atau

$$y = C \cos(\omega t - \beta) \quad (1.24)$$

dimana

$$C = \sqrt{u_0^2 + (v_0/\omega)^2} \quad (1.25)$$

$$\tan \alpha = \frac{u_0}{v_0/\omega} \quad (1.26)$$

dan

$$\tan \beta = \frac{v_0/\omega}{u} \quad (1.27)$$

Cara yang paling mudah untuk mendapatkan Persamaan (1.23) atau Persamaan (1.24) adalah dengan mengalikan dan membagi Persamaan (1.20) dengan faktor C dari Persamaan (1.25) adalah dengan menentukan α atau β oleh Persamaan (1.26) atau Persamaan (1.27), sehingga

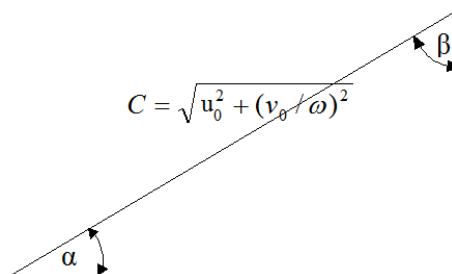
$$y = C \left(\frac{u_0}{C} \cos \omega t + \frac{v_0/\omega}{C} \sin \omega t \right) \quad (1.28)$$

Dengan bantuan Gambar 1.9 terlihat bahwa

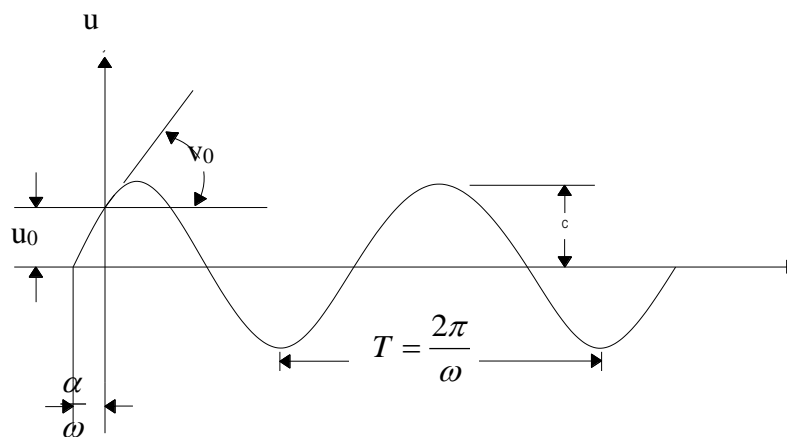
$$\sin \alpha = \frac{u_0}{C} \quad (1.29)$$

dan

$$\cos \alpha = \frac{v_0 / \omega}{C} \quad (1.30)$$



Gambar 1. 8 Definisi sudut α



Gambar 1. 9 Respons getaran bebas tak teredam

Substitusikan Persamaan (1.29) dan (1.30) ke dalam Persamaan (1.28) memberikan

$$u = C(\sin \alpha \cos \omega t + \cos \alpha \sin \omega t) \quad (1.31)$$

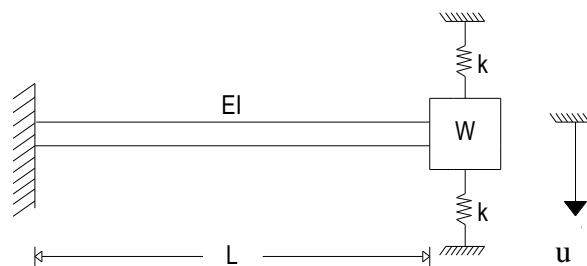
Pernyataan dalam tanda kurung pada Persamaan (1.31) identik dengan $\sin(\omega t + \alpha)$ dari Persamaan (1.23) dengan cara yang sama dapat dibuktikan bentuk solusi dari Persamaan (1.24)

Harga C dari Persamaan (1.23) atau Persamaan (1.24) merupakan hubungan antara amplitudo gerak dan sudut α (atau β) sebagai sudut fasa. Solusi gerak osilator sederhana terlihat pada Gambar 1.10.

1.10 Contoh Soal dan Penyelesaian

Contoh 1.1

Tentukan periode natural untuk sistem pada gambar di bawah ini. Anggap bahwa balok dan pegas yang memikul berat W tidak bermassa.



Penyelesaian :

Jika berat W dipindahkan sejauh u , balok dan pegas-pegas menggunakan total gaya pada massa sebesar :

$$L = \left(\frac{3EI}{L^3} + 2k \right) u$$

Balok dan pegas – pegas bekerja secara paralel. Kekakuan ekuivalen adalah:

$$k_e = \frac{L}{u} = \frac{3EI}{L^3} + 2k$$

Frekuensi natural :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{W} \left(\frac{3EI}{L^3} + 2k \right)}$$

Perioda natural :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi L \sqrt{\frac{W}{g} \frac{L}{3EI + 2kL^3}}$$

Contoh 1.2.

Besaran – besaran numerik berikut ini, $L = 100$ inci, $EI = 10^8$ (lb.inci²). $W = 3000$ lb, dan $k = 2000$ lb/inci. Jika berat W mempunyai perpindahan awal $u_0 = 1,0$ inci dan kecepatan awal $V_0 = 20$ inci/detik, tentukan perpindahan dan kecepatan 1 detik kemudian.

Penyelesaian :

Kekakuan :

$$k_e = \frac{3EI}{L^3} + 2k = \frac{3 \times 10^8}{100^3} + 2 \times 2000 = 4300 \text{ lb/in}$$

Frekuensi natural:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_e}{m}} = \sqrt{\frac{4300 \times 386}{3000}} = 23,52 \text{ rad/detik}$$

Getaran bebas sebagai akibat dari osilator tak teredam, Persamaan (1.20)

$$U(t) = U_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

$$U(t) = -U_0 \omega \sin \omega t + v_0 \cos \omega t$$

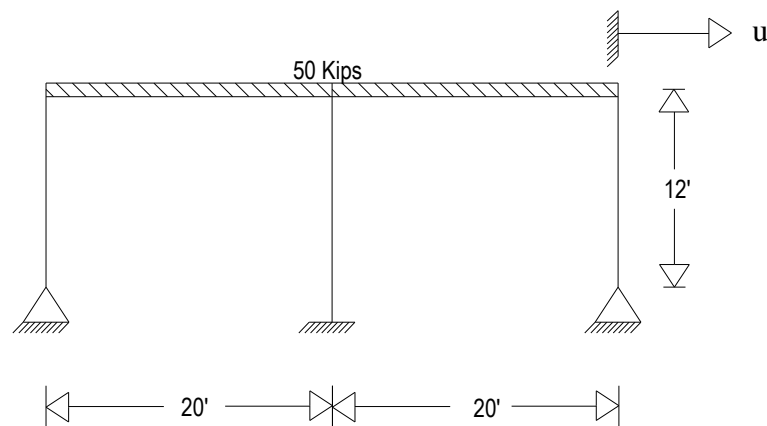
Perpindahan dan kecepatan pada $t = 1$ det, dengan harga awal $U_0 = 1$ inci, $v_0 = 20$ in/det

$$\dot{u}_{(t=1)} = -(1) \cos(23,52.t) + \frac{20}{23,52} \sin(23,52.1) = -0,89 \text{ in}$$

$$u_{(t=1)} = -1.23,52 \sin(23,52.t) + 20 \omega t(23,52) = 22,66 \text{ in/det}$$

Contoh 1.3

Tentukan frekuensi natural untuk gerak horisontal kerangka baja pada gambar di bawah ini. Anggap balok horisontal dengan kekakuan tak terhingga dan abaikan massa kolom.



Penyelesaian :

Kekakuan kerangka besarnya

$$k = \frac{12EI_1}{L^3} + \frac{3E(2I_2)}{L^3}$$

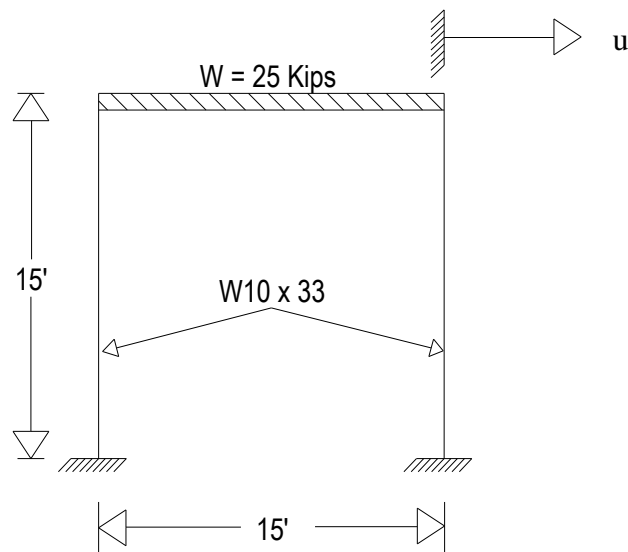
$$k = \frac{12 \times 30 \times 10^6 \times 170,9}{144^3} + \frac{3 \times 30 \times 10^6 \times 2 \times 82,5}{144^3} = 25\,577 \text{ lb/in}$$

Frekuensi natural :

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{25577 \times 386}{50000}} = 2,24 \text{ spd}$$

Contoh 1.4.

Hitung frekuensi natural untuk gerak horisontal dari kerangka baja pada gambar di bawah ini untuk kondisi berikut ini: (a) bagian horisontal dianggap kaku tak hingga.



Penyelesaian :

Batang horisontal kaku tak terhingga

Kekakuan :

$$k = 2 \frac{12EI}{L^3} = 2 \frac{12 \times 30 \times 10^6 \times 171}{(12 \times 15)^3} = 21110 \text{ lb/in}$$

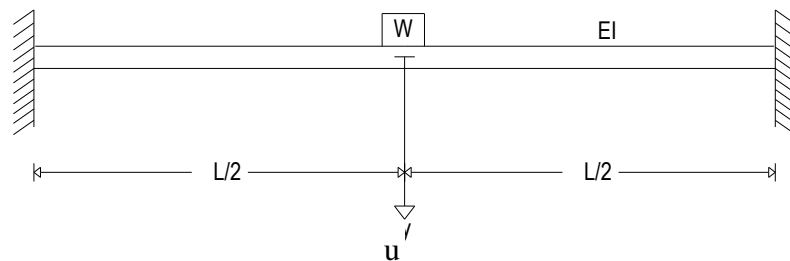
Frekuensi natural

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{21110 \times 386}{25000}} = 18,05 \text{ rad/det}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 2,87 \text{ spd}$$

Contoh 1.5

Tentukan frekuensi natural balok terjepit pada gambar di bawah ini yang memikul berat W di tengah bentang. Abaikan massa balok.



Penyelesaian :

Koefisien kekakuan :

$$k = 2 \frac{12EI}{(L/2)^3} = \frac{192EI}{L^3}$$

Frekuensi natural

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{192EI}{L^3 W}} \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{3EI}{W}}$$

Contoh 1.6

Besaran numerik untuk Contoh Soal 1.5 diberikan sebagai berikut:

$L = 120$ inci, $EI = 10^9$ (lb.inci²), dan $W = 5000$ lb. Jika perpindahan dan kecepatan awal dari berat W adalah $y_0 = 0,5$ inci dan $v_0 = 15$ inci/detik, tentukan perpindahan, kecepatan dan percepatan dari W pada saat $t = 2$ detik.

Penyelesaian :

$$\omega = \sqrt{\frac{192 \times 10^9 \times 386}{120^3 \times 5000}} = 92,61 \text{ rad/det}$$

$$U = U_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

$$= 0,5 \cos(92,61 \times 2) + \frac{15}{92,61} \sin(92,61 \times 2)$$

$$U = -0,474 \text{ in pada } t = 2 \text{ det}$$

$$\dot{u} = -\omega u_0 \sin \omega t + v_0 \cos \omega t$$

$$= -92,61 \times 0,5 \sin(92,61 \times 2) + 15 \cos(92,61 \times 2)$$

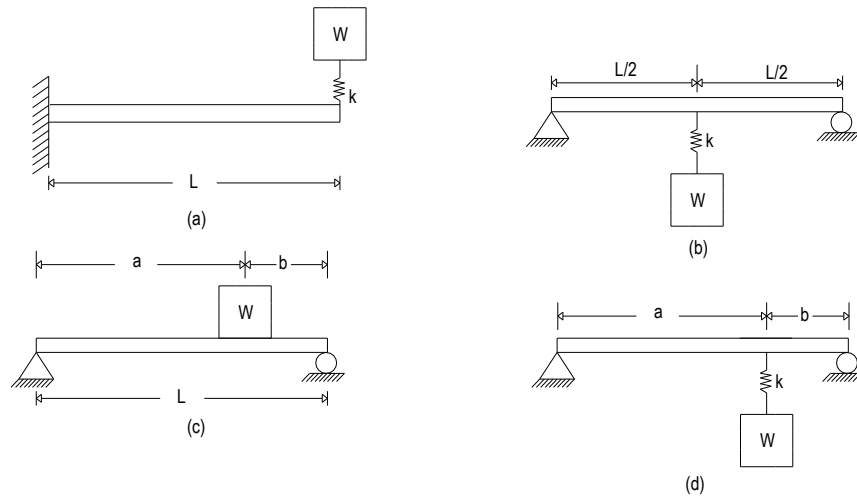
$$\dot{u} = -21,05 \text{ in/det} \quad \text{pada } t = 2 \text{ det}$$

$$\ddot{u} = -\omega^2 u_0 \cos \omega t - v_0 \omega \sin \omega t = \omega^2 u$$

$$\ddot{u} = 4065 \text{ in/det}^2 \quad \text{pada } t = 2 \text{ det}$$

Contoh 1.7.

Tentukan frekuensi natural dari berat W untuk masing – masing pada gambar di bawah ini. Balok mempunyai penampang yang sama, dan momen inersia I serta modulus elastisitas E yang sama. Abaikan massa balok.



Penyelesaian:

Kasus a)

Konstanta pegas k_b untuk balok adalah $k_b = \frac{3EI}{L^3}$

Pegas terpasang seri, maka kekakuan ekuivalen adalah

$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k_b} = \frac{1}{k} + \frac{L^3}{3EI} = \frac{3EI + kL^3}{3EI k}$$

$$k_e = \frac{3EI k}{3EI + kL^3}$$

Frekuensi natural :

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_e}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3EIkg}{(3EI + kL^3)W}}$$

Kasus b)

Konstanta pegas balok adalah $k_b = \frac{48EI}{L^3}$

Pegas terpasang seri, $\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k} + \frac{L^3}{48EI} = \frac{48EI + kL^3}{48EI}$

Frekuensi natural, $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_e}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{48EIkg}{(48EI + kL^3)W}}$

Kasus c)

Lendutan balok dibebani sederhana dengan muatan P adalah $\delta = \frac{Pa^2b^2}{3EIL}$

Maka, $k = \frac{P}{\delta} = \frac{3EIL}{a^2b^2}$

dan $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3EILg}{a^2b^2W}}$

Kasus d)

Kekakuan dari balok, dari kasus c) $k_b = \frac{3EIL}{a^2b^2}$

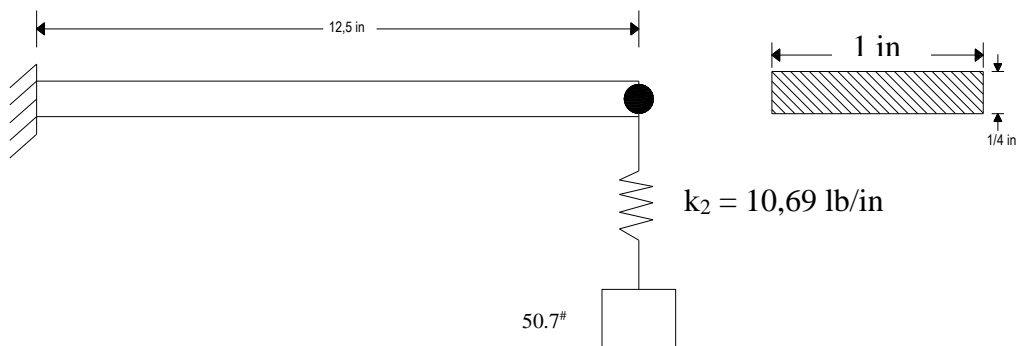
Pegas seri terpasang seri, $\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k_b} = \frac{1}{k} + \frac{3EIL}{a^2b^2}$

$$= \frac{a^2 b^2 + 3EI k}{ka^2 b^2}$$

Frekuensi natural, $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_e}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{ka^2 b^2 g}{(a^2 b^2 + 3EI k)W}}$

Contoh 1.8.

Tentukan frekuensi natural dari sistem pada gambar di bawah ini yang terdiri dari suatu berat 50,7 lb terpasang pada sebuah balok kantilever oleh pegas k_2 . Tebal balok kantilever $t = \frac{1}{4}$ inchi, lebar $b = 1$ inchi, modulus elastisitas $E = 30000000$ pound per inci², dan $L = 12,5$ inchi. Pegas dengan kekakuan $k_2 = 10,69$ (lb/inchi).



Penyelesaian :

Lendutan Δ pada ujung bebas dari balok kantilever akibat gaya statis P , diberikan oleh

$$\Delta = \frac{PL^3}{3EI}$$

Konstanta pegasnya adalah

$$k_1 = \frac{P}{\Delta} = \frac{3EI}{L^3}$$

Di mana $I = \frac{1}{12}bt^3$ (untuk penampang segiempat). Kantilever dan pegas dihubungkan sebagai pegas terpasang seri, akibatnya konstanta pegas ekivalen yang diberikan oleh Persamaan (1.5) adalah

$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

Dengan mensubstitusikan harga numeriknya, didapat

$$I = \frac{1}{12} \times 1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{768} \text{ (in)}^4,$$

$$k_1 = \frac{3 \times 30 \times 10^6}{(12,5)^3 \times 768} = 60 \text{ lb/in}$$

dan

$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{60} + \frac{1}{10,69}$$

$$k_e = 9,07 \text{ lb/in.}$$

Frekuensi natural diberikan oleh

$$\omega = \sqrt{k_e / m}$$

$$\omega = \sqrt{9,07 \times 386 / 50,7}$$

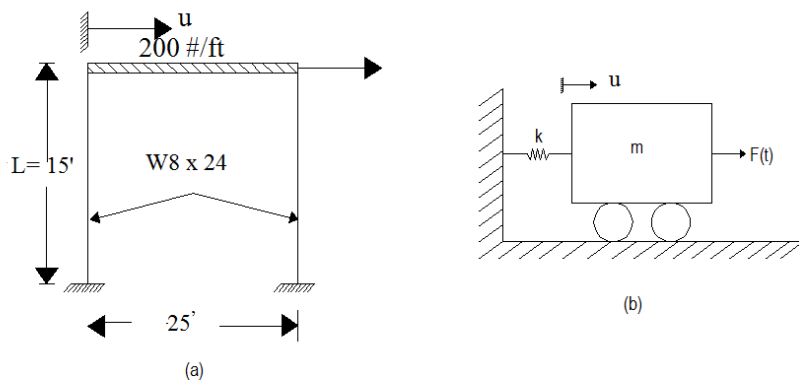
$$\omega = 8,31 \text{ rad/det}$$

atau

$$F = 1,32 \text{ sps}$$

Contoh 1.9.

Tinjaulah kerangka pada gambar di bawan ini yang merupakan kerangka baja kaku dimana bekerja gaya dinamis horizontal di tepi atasnya. Sebagai bagian dari perencanaan suatu struktur yang menyeluruh, hitunglah frekuensi natural dari kerangka tersebut.



Penyelesaian:

Dibuat dua anggapan:

- (1) massa kolom dan dinding diabaikan;
- (2) balok yang cukup kaku untuk mencegah rotasi pada puncak kolom.

Anggapan ini bukan untuk menyelesaikan masalah akan tetapi untuk menyederhanakan analisis. Dengan kondisi yang demikian, kerangka ini dapat dimodelisasikan sebagai sistem massa-pegas seperti pada gambar pada soal di atas.

Parameter-parameter dari model ini dapat dihitung sebagai berikut:

$$W = 200 \times 25 = 5000 \text{ lb}$$

$$I = 82,5 \text{ in}^4$$

$$E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$k^* = \frac{12E(2I)}{L^3} = \frac{12 \times 30 \times 10^6 \times 165}{(15 \times 12)^3}$$

$$k = 10,185 \text{ lb/in}$$

Jadi frekuensi natural adalah

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{kg}{W}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{10,185 \times 386}{5000}} = 4,46 \text{ sps}$$

Dengan demikian frekuensi natural sistem sebesar 4,46 sps

1.11 Rangkuman

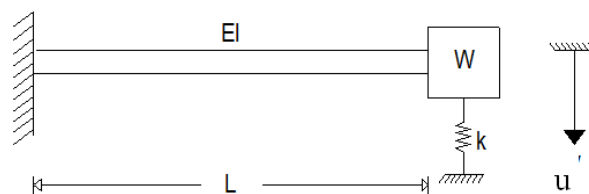
- Derajat kebebasan struktur merupakan derajat kebebasan yang diperlukan untuk menyatakan posisi suatu sistem pada setiap saat.
- Sistem berderajat kebebasan tunggal dapat dijelaskan secara tepat dengan model matematis, yang mempunyai elemen – elemen: massa m menyatakan massa dan sifat inersia dari struktur, pegas k yang menyatakan gaya pegas elastisitas dan kapasitas energi potensial dari struktur, redaman c yang

menyatakan sifat geseran dan kehilangan energi dari struktur serta gaya $F(t)$ untuk menyatakan gaya luar yang bekerja pada sistem struktur dengan berdasarkan fungsi waktu.

- Persamaan gerak dinamis dapat diselesaikan dengan berbagai solusi persamaan diferensial
- Persamaan gerak dinamis dengan getaran bebas merupakan gerak struktur akibat berat sendiri struktur, tanpa dibebani beban luar struktur. Persamaan ini akan menghasilkan perioda dan frekuensi natural yang merupakan karakteristik dari struktur tersebut.
- Perioda adalah waktu yang diperlukan untuk menghasilkan satu getaran alami struktur dengan satuan detik.
- Frekuensi adalah banyaknya getaran yang terjadi dalam satu detik dengan satuan getaran per detik atau siklus per detik.

1.12 Soal Latihan

1. Tentukan periode natural dan frekuensi natural untuk sistem pada gambar di bawah ini. Anggap bahwa balok dan pegas yang yang memikul berat W tidak bermassa.



2. Jika suatu sistem pada Soal nomor 1 di atas mempunyai besaran – besaran numerik berikut ini, $L = 10$ meter, $E = 2500$ MPa, $I = 45$ cm⁴, $W = 300$ kg, dan $k = 200$ kg/cm. Berat W mempunyai perpindahan awal $u_0 = 1,0$ cm dan kecepatan awal $V_0 = 20$ cm/detik, maka tentukan:
- Perpindahan dan kecepatan 1 detik kemudian.
 - Tentukan frekuensi dan perioda sistem tersebut.

BAB 2

SISTEM DERAJAT – KEBEBASAN TUNGGAL

TEREDAM

2.1. Redaman Liat (Viscous Damping)

Pada bab ini, kita akan mempelajari sistem derajat kebebasan tunggal dengan redaman. Dengan memperhitungkan gaya gaya redam (*damping force*) dalam analisis dinamis struktur, dianggap bahwa gaya-gaya ini selalu selaras (*proportional*) dengan besar kecepataannya dan mempunyai arah gerak yang berlawanan. Bentuk redaman ini dikenal sebagai redaman liat (*viscous damping*); ini adalah bentuk dari gaya redam (*damping force*) yang dapat terjadi pada benda yang tertahan geraknya dalam cairan pekat (*viscous fluid*).

Pada beberapa keadaan, redaman liat (*viscous damping*) dapat dianggap benar nyata dan dimana mekanisme pelepasan energi mendekati kondisi liat (*viscous*). Namun, anggapan redaman liat (*viscous damping*) ini sering dibuat tanpa memperhatikan kenyataan karakteristik pelepasan (*dissipative characteristic*) dari sistem. Analisis matematik yang relatif sederhana, merupakan alasan utama penggunaan metoda ini secara luas.

2.2 Persamaan Gerak (Equation Of Motion)

Diasumsikan sebuah sistem struktur yang dimodelisasikan sebagai osilator sederhana (*simple oscillator*) dengan redaman liat (*viscous-damping*), seperti pada

Gambar 2.1 (a). Pada gambar ini m dan k adalah massa dan konstanta pegas (*spring constant*) dari osilator dan c adalah koefisien redaman liat (*viscous damping coefficient*).

Penyelesaiannya dapat dilakukan dengan cara seperti pada kondisi osilator tak teredam, dengan menggambar diagram *free body* (DFB) dan menggunakan hukum Newton untuk mendapatkan persamaan diferensial gerak (*differential equation of motion*). Gambar 2.1 (b) memperlihatkan DFB dari osilator teredam (*damped oscillator*) dan gaya inersia $m\ddot{u}$, sehingga dapat digunakan prinsip d'Alembert. Penjumlahan gaya-gaya pada arah u memberikan persamaan diferensial gerak (*differential equation of motion*)

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \quad (2.1)$$

Dapat dibuktikan bahwa solusi coba-coba (*trial solution*) $u = A \sin \omega t$ atau $u = B \cos \omega t$ tidak akan memenuhi Persamaan (2.1). Namun, fungsi eksponensial $u = C e^{pt}$ memenuhi persamaan ini.

Dengan mensubstitusikan persamaan ini pada Persamaan (2.1) didapat persamaan

$$mC_p^2 e^{pt} + cC_p e^{pt} + kC e^{pt} = 0$$

Dimana setelah menghilangkan faktor yang sama, didapatkan persamaan yang disebut persamaan karakteristik (*the characteristic equation*) untuk sistem, yaitu

$$mp^2 + cp + k = 0 \quad (2.2)$$

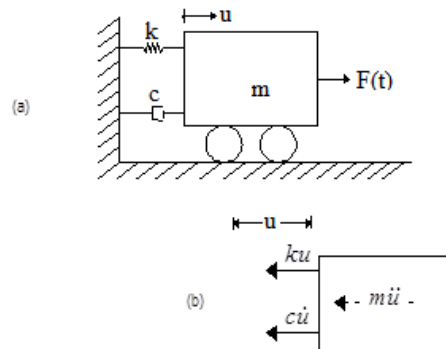
Akar dari persamaan kuadrat ini adalah

$$\begin{aligned} p_1 &= -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \\ p_2 & \end{aligned} \quad (2.3)$$

Sehingga solusi umum (*general solution*) dari Persamaan (2.1) didapat dari superposisi dua solusi yang mungkin, yaitu

$$u(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} \quad (2.4)$$

Dimana C_1 dan C_2 adalah konstanta integrasi yang ditentukan dari kondisi awal (*initial conditions*).



Gambar 2. 1 Osilator redaman liat dan *diagram free body*

2.3 Sistem Redaman Kritis (Critically Damped System)

Untuk suatu sistem yang beresilasi dengan redaman kritis (*critical damping*) seperti definisi di atas, ekspresi di bawah tanda akar pada Persamaan (2.3) sama dengan nol, yaitu:

$$\left(\frac{c_{cr}}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0 \quad (2.5)$$

atau

$$c_{cr} = 2\sqrt{km} \quad (2.6)$$

Dimana C_{cr} menyatakan harga redaman kritis (*critical damping value*).

Seperti yang telah dipelajari pada Bab 1, bahwa frekuensi natural dari sistem tak teredam dinyatakan oleh $\omega = \sqrt{k/m}$ maka koefisien redaman kritis (*critical damping coefficient*) yang diberikan oleh Persamaan (2.6) dapat juga dinyatakan dengan notasi,

$$c_{cr} = 2m\omega = \frac{2k}{\omega} \quad (2.7)$$

Harga akar-akar persamaan karakteristik dari sistem redaman kritis, adalah sama dan berasal dari Persamaan (2.3) yaitu,

$$p_1 = p_2 = -\frac{c_{cr}}{2m} \quad (2.8)$$

Oleh karena kedua akar tersebut sama, maka solusi umum yang diberikan oleh Persamaan (2.4) mempunyai satu konstanta integrasi, sebab itu terdapat satu solusi independen yaitu,

$$u_1(t) = C_1 e^{-(c_{cr}/2m)t} \quad (2.9)$$

Solusi independen yang lain didapat dengan menggunakan fungsi,

$$u_2(t) = C_2 e^{-(c_{cr}/2m)t} \quad (2.10)$$

Persamaan ini dapat diuji dan akan memenuhi persamaan diferensial (2.1). solusi umum untuk sistem redaman kritis diberikan oleh superposisi dua solusi di atas.

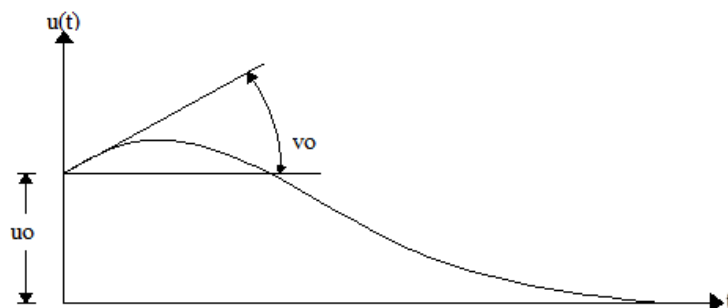
$$u(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-(c_{cr}/2m)t} \quad (2.11)$$

2.4 Sistem Redaman Superkritis (*Overdamped Sytem*)

Pada sistem redaman superkritis (overdamped system), koefisien redamannya lebih besar dari koefisien redaman dari sistem redaman kritis yaitu,

$$c > c_{cr} \quad (2.12)$$

Oleh karena itu besaran di bawah tanda akar dari Persamaan (2.3) adalah positif, jadi kedua akar dari persamaan karakteristik adalah riil dan solusinya diberikan oleh Persamaan (2.4). Dalam hal ini yang perlu diperhatikan untuk sistem redaman superkritis dan redaman kritis, gerakan yang terjadi bukan osilasi, namun besar osilasi mengecil secara eksponensial dengan waktu menuju nol. Gambar 2.2 menyatakan grafik respons dari osilator sederhana dengan redaman kritis. Respons dari sistem redaman superkritis mirip dengan gerak sistem redaman kritis pada Gambar 2.2, tetapi diperlukan lebih banyak waktu untuk kembali ke posisi netral bila redaman bertambah.



Gambar 2. 2 Respons getar bebas dengan redaman kritis

2.5 Sistem Redaman Subkritis (*Underdamped System*)

Bila harga koefisien redaman lebih kecil dari harga kritis ($c < c_{cr}$), yang mana akan terjadi bila besaran di bawah tanda akar negatif, maka harga akar-akar dari Persamaan karakteristik (2.3) adalah bilangan kompleks, jadi

$$\begin{aligned} p_1 &= -\frac{c}{2m} \pm i \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} \\ p_2 & \end{aligned} \quad (2.13)$$

Dimana $i = \sqrt{-1}$ adalah unit imajiner. Untuk hal ini perlu digunakan Persamaan Euler yang menghubungkan fungsi-fungsi eksponensial dengan trigonometrik yaitu,

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x \quad (2.14)$$

Dengan mensubstitusikan akar-akar p_1 dan p_2 dari Persamaan (2.13) ke dalam Persamaan (2.4) dan dengan menggunakan Persamaan (2.14) akan memberikan bentuk solusi umum dari sistem redaman subkritis (*underdamped system*).

$$y(t) = e^{-(c_{cr}/2m)t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) \quad (2.15)$$

Dimana A dan B adalah konstanta integrasi dan ω_D adalah frekuensi dari sistem yang diberikan oleh,

$$\omega_D = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} \quad (2.16)$$

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2} \quad (2.17)$$

Hasil terakhir ini didapatkan sesudah mensubstitusikan pada Persamaan (2.16), besaran frekuensi natural tak teredam (*undamped natural frequency*),

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.18)$$

Sedangkan rasio redaman (*damping ratio*) dari sistem yang didefinisikan sebagai,

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}} \quad (2.19)$$

Kemudian bila ditentukan kondisi awal (*initial conditions*) dari perpindahan dan kecepatan adalah u_0 dan v_0 , maka konstanta integrasi dapat dihitung, kemudian disubstitusikan ke Persamaan (2.15) memberikan,

$$y(t) = e^{-\xi\omega t} \left(y_0 \cos \omega_D t + \frac{v_0 + y_0 \xi \omega}{\omega_D} \sin \omega_D t \right) \quad (2.20)$$

Alternatif lain penulisan persamaan ini adalah,

$$u(t) = C e^{-\xi\omega t} \cos(\omega_D t - \alpha) \quad (2.21)$$

Dimana

$$C = \sqrt{u_0^2 + \frac{(v_0 + u_0 \xi \omega)^2}{\omega_D^2}} \quad (2.22)$$

dan

$$\tan \alpha = \frac{(v_0 + u_0 \xi \omega)}{\omega_D u_0} \quad (2.23)$$

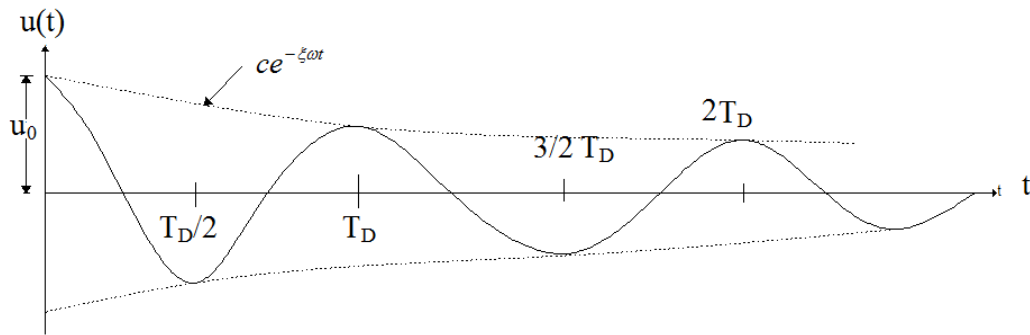
Rekaman grafik dari respons pada suatu sistem redaman subkritis (*underdamped system*) dengan perpindahan awal (*initial displacement*) u_0 , tetapi mulai dengan kecepatan nol ($v_0 = 0$) adalah seperti Gambar 2.3. Dapat dilihat pada gambar ini bahwa gerak adalah bergetar osilasi tapi tidak periodik. Hal ini dikarenakan amplitudo dari getaran tidak konstan selama gerakan tetapi berkurang setiap siklus, namun osilasi itu mempunyai interval waktu yang sama. Interval waktu ini disebut periode redaman getaran (*damped period of vibration*) dan diberikan oleh Persamaan (2.17)

$$T_D = \frac{2\pi}{\omega_D} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-\xi^2}} \quad (2.24)$$

Harga dari koefisien redaman untuk struktur adalah jauh lebih kecil dari koefisien redaman kritis dan biasanya diantara 2 sampai 20% dari harga redaman kritis. Substitusi harga maksimum $\xi = 0,20$ pada Persamaan (2.17)

$$\omega_D = 0,98\omega \quad (2.25)$$

Dapat dilihat bahwa frekuensi getaran suatu sistem dengan 20% ratio redaman (*damping ratio*) adalah hampir sama dengan frekuensi natural sistem tak teredam. Jadi dalam praktiknya, frekuensi natural dari sistem teredam dapat diambil sama dengan frekuensi natural sistem tak teredam.



Gambar 2. 3 Respons getaran bebas untuk sistem redaman subkritis

2.6 Pengurangan Logaritmis

Metoda praktik secara eksperimental koefisien redaman dari satu sistem, adalah memberikan getaran bebas, kemudian didapatkan rekaman dari gerak osilasi seperti terlihat pada Gambar (2.4) serta mengukur besar pengurangan amplitudo dari gerak tersebut. Pengurangan dapat terlihat jelas sekali dengan pengurangan logaritmis δ yang didefinisikan sebagai logaritma natural dari ratio dua puncak amplitudo yang berurutan u_1 dan u_2 dari getaran bebas yaitu,

$$\delta = \ln \frac{u_1}{u_2} \quad (2.26)$$

Evaluasi redaman dari pengurangan logaritmis adalah sebagai berikut. Perhatikan gerak suatu getaran teredam yang digambarkan secara grafik pada Gambar 2.4 dan secara analitik dinyatakan oleh Persamaan (2.21), sebagai,

$$u(t) = Ce^{-\xi\omega t} \cos(\omega_D t - \alpha)$$

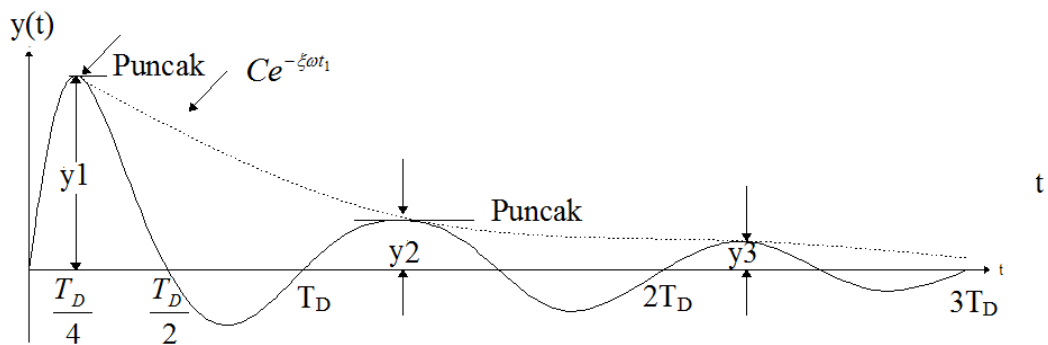
Dapat terlihat dari persamaan ini bahwa, bila faktor cosinus sama dengan satu, maka perpindahan berada pada lengkungan eksponensial $u(t) = Ce^{-\xi\omega t}$ seperti pada Gambar 2.4. Namun titik-titik ini hanya berada dekat, tapi tidak sama dengan posisi dari perpindahan maksimum. Titik-titik dari lengkungan eksponensial berada sedikit di sebelah kanan dari titik-titik amplitudo maksimum. Untuk sebagian besar masalah praktek, perbedaan itu dapat diabaikan dan lengkungan perpindahan dapat dianggap berimpit pada puncak amplitudo, dengan lengkungan $u(t) = Ce^{-\xi\omega t}$ sedemikian rupa hingga dapat ditulis, untuk dua puncak berturut-turut u_1 pada waktu t_1 dan u_2 pada waktu T_D beberapa detik berikutnya,

$$u_1 = Ce^{-\xi\omega t_1}$$

dan

$$u_2 = Ce^{-\xi\omega(t_1+T_D)}$$

Titik-titik tangen [$\cos(\omega_D t - \alpha) = 1$]



Gambar 2. 4 Perpindahan puncak dan perpindahan pada titik tangensial

Jika kedua amplitudo ini dibagi dan harga logaritma naturalnya disederhanakan, kita akan mendapatkan Persamaan (2.27) sebagai berikut,

$$\delta = \ln \frac{u_1}{u_2} = \xi \omega T_D \quad (2.27)$$

atau dengan substitusi perioda redaman T_D dari Persamaan (2.24)

$$\delta = 2\pi\xi / \sqrt{1 - \xi^2} \quad (2.28)$$

Seperti terlihat bahwa, *ratio* redaman ξ dapat dihitung dari Persamaan. (2.23) setelah menentukan secara eksperimental besaran amplitudo dari dua puncak berturutan dari sistem getaran bebas. Untuk harga kecil dari rasio redaman, Persamaan (2.28) dapat diperkirakan dengan

$$\delta \cong 2\pi\xi \quad (2.29)$$

2.7 Contoh Soal dan Penyelesaian

Contoh 2.1.

Ulangi Contoh Soal 1.1 pada Bab 1 dengan anggapan bahwa sistem mempunyai 15% redaman kritis.

Penyelesaian :

Besaran – besaran numerik berikut ini diberikan :

$$\begin{array}{llll} L = 100 \text{ in,} & EI = 10^8 \text{ lb in}^2 & W = 3000 \text{ lb} & \\ k = 2000 \text{ lb/in} & y_0 = 1,0 \text{ in} & V_0 = 20 \text{ in/detik} & t = 1 \text{ detik} \end{array}$$

Kekakuan

$$k_e = \frac{3EI}{L^3} + 2k = \frac{3 \times 10^8}{100^3} + 2 \times 2000 = 4300 \text{ lb/in}$$

Frekuensi natural :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4300}{3000}} \cdot 386 = 23,52 \text{ rad/det}$$

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2} = 23,52 \sqrt{1 - 0,15^2} = 23,52 \text{ rad/det} \quad \text{Persamaan (2.17)}$$

Perpindahan dan kecepatan sesudah $t = 1$ detik :

$$u(t) = C e^{-\xi \omega t} \cos(\omega_D t - \alpha) \quad \text{Persamaan (2.21)}$$

$$\dot{u}(t) = -C e^{-\xi \omega t} [\xi \omega \cos(\omega_D t - \alpha) + \omega_D \sin(\omega_D t - \alpha)]$$

dimana

$$C = \sqrt{u_0^2 + \frac{(v_0 + u_0 \xi \omega)^2}{\omega_D^2}} = \sqrt{1^2 + \frac{(20 + 0,15 \cdot 23,52)^2}{23,52^2}} = 1,423 \text{ in}$$

Persamaan (2.22)

$$\tan \alpha = \frac{(v_0 + u_0 \xi \omega)}{\omega_D u_0} = \frac{20 + 0,15 \cdot 23,52}{23,52 \cdot 1} = 1,012 \quad \text{Persamaan (2.23)}$$

$$\alpha = \arctan(1,012) = 0,791$$

Maka

$$u_{(t=1 \text{ det})} = 1,423 e^{-0,15 \cdot 23,52} \cos(23,52 - 0,791) = -0,0373 \text{ in}$$

$$\dot{y}_{(t=1 \text{ det})} = -1,423 e^{-0,15 \cdot 23,52} [0,15 \cdot 23,52 \cos(22,459) + 23,52 \sin(22,459)]$$

$$\dot{u} = 0,570 \text{ in/det}$$

Contoh 2.2.

Ulangi Contoh Soal 1.6 pada Bab 1 dengan anggapan bahwa sistem mempunyai 10% redaman kritis.

Penyelesaian :

Berdasarkan Jawaban Soal 1.6:

$$\omega = \sqrt{\frac{192 \times 10^9 \times 386}{120^3 \times 5000}} = 92,61 \text{ rad/det}$$

Frekuensi natural :

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2} = 92,61 \sqrt{1 - 0,10^2} = 92,15 \text{ rad/det}$$

Perpindahan, kecepatan dan percepatan :

$$u(t) = C e^{-\xi \omega t} \cos(\omega_D t - \alpha) \quad \text{Persamaan (2.21)}$$

$$\dot{u}(t) = -C e^{-\xi \omega t} [\xi \omega \cos(\omega_D t - \alpha) + \omega_D \sin(\omega_D t - \alpha)]$$

$$\ddot{u} = C e^{-\xi \omega t} [2\xi \omega \omega_D \sin(\omega_D t - \alpha) + (\xi^2 \omega^2 - \omega_D^2) \cos(\omega_D t - \alpha)]$$

Keadaan awal (t = 0 det)

$$u_0 = 0,5 \text{ in} \quad v_0 = 15 \text{ in/det}$$

$$C = \sqrt{u_0^2 + \frac{(v_0 + y_0 \xi \omega)^2}{\omega_D^2}} = \sqrt{0,5^2 + \frac{(15 + 0,5 \cdot 92,61)^2}{92,15^2}} = 0,5435 \text{ in}$$

$$\tan \alpha = \frac{(v_0 + u_0 \xi \omega)}{\omega_D u_0} = \frac{15 + 0,5 \cdot 0,1 \cdot 92,61}{92,61 \cdot 0,5} = 0,4261$$

$$\alpha = \arctan(0,4261) = 23,0767$$

Keadaan akhir (t = 2 detik) :

$$e^{-\xi \omega t} = e^{-0,1 \cdot 92,61 \cdot 2} = 9,0364 \cdot 10^{-9}$$

$$\cos (92,15 \cdot 2 - 23,077) = -0,9468$$

$$\sin (92,15 \cdot 2 - 23,077) = 0,3219$$

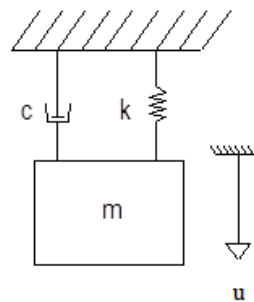
$$u = 0,5435.9,0364.10^{-9}(-0,9468) = -4,65.10^{-9} \text{ in}$$

$$\dot{u}(t) = -0,5435.9,0364.10^{-9}(-0,1.92,61. - 0,9468 + 92,15.0,3219) = -4,083.10^{-8} \text{ in/det}$$

$$\ddot{u} = 0,5435.9,0364.10^{-4}[2.0,1.92,61.92,15.0,3219 - (0,1^2.92,61^2 - 92,15^2)0,9468] = 4,18.10^{-5} \text{ in/det}^2$$

Contoh 2.3

Amplitudo dari getaran sistem yang terlihat pada Gambar P2.3 berkurang 5% setiap siklus gerak. Tentukan koefisien redaman c dari sistem, $k = 200 \text{ lb/in}$ redaman $m = 10 \text{ lb.detik}^2 / \text{m}$.



Gambar P2.3

Penyelesaian :

Besaran – besaran numerik berikut ini diberikan :

$$k = 200 \text{ lb/in}$$

$$c_{cr} = 2\sqrt{km} = 2\sqrt{200.10} = 89,443$$

$$u_1 = 1,0 \text{ in}$$

$$u_2 = 0,95 \text{ in}$$

$$m = 10 \text{ lb}\cdot\text{det}^2/\text{in}$$

$$\delta = \ln \frac{u_1}{u_2} = \ln \frac{1,0}{0,95} = 0,0513$$

Dengan Persamaan (2.24)

$$\xi = \frac{\delta}{2\pi} = \frac{0,0513}{2\pi} = 0,00816$$

$$c = \xi c_{cr} = 0,00816 \cdot 89,443 = 0,73 \text{ lb}\cdot\text{det}/\text{in}$$

Contoh 2.4

Sebuah sistem bergetar terdiri dari berat $W = 10 \text{ lb}$ dan pegas dengan kekakuan $k = 20 \text{ lb}/\text{in}$, dipengaruhi redaman liat (*viscous damped*) sehingga dua amplitudo puncak berturutan adalah 1,00 sampai 0,85. Tentukanlah:

- (a) frekuensi natural dari sistem tak teredam,
- (b) pengurangan logaritmis,
- (c) rasio redaman,
- (d) koefisien redaman,
- (e) frekuensi natural teredam.

Penyelesaian :

- (a) Frekuensi natural tak teredam dari sistem dalam radian perdetik adalah

$$\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{(20 \times 386)/10} = 27,78 \text{ rad/det}$$

atau dalam putaran per detik.

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 4,42 \text{ sps}$$

(b) Pengurangan logaritmis diberikan oleh

$$\delta = \ln \frac{u_1}{u_2} = \ln \frac{1,00}{0,85} = 0,163$$

(c) *Ratio* redaman dari Persamaan (2.29) mendekati harga sama dengan

$$\xi = \frac{\delta}{2\pi} = \frac{0,163}{2\pi} = 0,026$$

(d) Koefisien redaman didapatkan dari Persamaan (2.6) dan Persamaan (2.19)

seperti,

$$c = \xi c_{cr} = 2 \times 0,026 \sqrt{(10 \times 20)/386} = 0,037 \text{ lb.det/in}$$

(e) Frekuensi natural dari sistem teredam diberikan oleh Persamaan (2.17) yaitu,

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$\omega_D = 27,78 \sqrt{1 - (0,026)^2} = 27,77 \text{ rad/det}$$

Contoh 2.5.

Sebuah rantai seberat $W = 4000 \text{ lb}$ ditunjang oleh empat buah kolom yang sama dan diikat pada fondasi dan rantai. Secara eksperimental telah ditentukan gaya statis

sebesar $F = 1000$ lb bekerja horizontal pada lantai itu dan mengakibatkan perpindahan sebesar $\Delta = 0,10$ in. Diperkirakan redaman pada struktur sebesar 5% dari redaman kritis. Tentukanlah:

- (a) frekuensi natural tak teredam,
- (b) koefisien redaman absolut (*absolute damping coefficient*),
- (c) pengurangan logaritmis, dan
- (d) jumlah siklus dan waktu yang di perlukan supaya amplitudo gerakan ini berkurang dari harga awal 0,1 in menjadi 0,01 in.

Penyelesaian:

- (a) Koefisien kekakuan (gaya per satuan perpindahan) dihitung sebagai berikut:

$$k = \frac{F}{\Delta} = \frac{1000}{0,1} = 10000 \text{ lb/in}$$

Dan frekuensi natural tak teredam

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{W/g}} = \sqrt{\frac{10000 \times 386}{4000}} = 31,06 \text{ rad/det}$$

- (b) Redaman kritis adalah

$$c = 2\sqrt{km} = 2\sqrt{10000 \times 4000/386} = 643,8 \text{ lb.det/in}$$

Dan redaman absolut

$$c = \xi c_{cr} = 0,05 \times 643,8 = 32,19 \text{ lb.det/in}$$

(c) Pengurangan logaritmis mendekati harga

$$\delta = \ln\left(\frac{u_0}{u_1}\right) \cong 2\pi\xi = 2\pi(0,05) = 0,314$$

dan *ratio* dari dua amplitudo berturutan

$$\frac{u_0}{u_1} = 1,37$$

(d) *Ratio* antara amplitudo pertama u_0 dan amplitudo u_k sesudah siklus k dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{u_0}{u_k} = \frac{u_0}{u_1} \cdot \frac{u_1}{u_2} \dots \frac{u_{k-1}}{u_k}$$

Kemudian dihitung logaritma natural, dan kita dapatkan,

$$\ln \frac{u_0}{u_1} = \delta + \delta + \dots + \delta = k\delta$$

$$\ln \frac{0,1}{0,01} = 0,314k$$

$$k \frac{\ln 10}{0,314} = 8 \text{ siklus}$$

Frekuensi teredam ω_D diberikan oleh

$$\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2} = 31,06\sqrt{1-(0,05)^2} = 31,02 \text{ rad/det}$$

Dan periode T_D oleh

$$T_D = \frac{2\pi}{\omega_D} = \frac{2\pi}{31,02} = 0,2025 \text{ det}$$

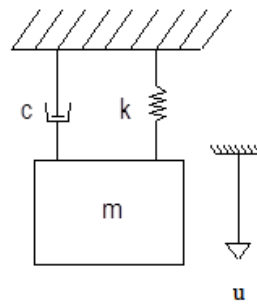
Kemudian waktu untuk delapan siklus adalah $t(8 \text{ siklus}) = 8 T_D = 1,62 \text{ det}$

2.8 Rangkuman

- Gaya redaman (*damping force*) merupakan gaya yang selaras (*proportional*) dengan besar kecepatannya dan mempunyai arah gerak yang berlawanan.
- Bentuk redaman ini dikenal sebagai redaman liat (*viscous damping*). Umumnya bentuk dari gaya redam (*damping force*) ini dapat terjadi pada benda yang tertahan geraknya dalam cairan pekat (*viscous fluid*).
- Redaman dapat dikategorikan redaman kritis (C_r), redaman superkritis dan redaman subkritis
- Redaman kritis, $C_r = 2m\omega$ dimana m adalah massa sedangkan ω adalah frekuensi sudut
- Redaman superkritis jika koefisien redaman $c > C_r$
- Redaman subkritis jika koefisien redaman $c < C_r$

2.9 Soal Latihan

1. Amplitudo dari getaran sistem yang terlihat pada gambar di bawah ini berkurang 8% setiap siklus gerak. Tentukan koefisien redaman c dari sistem, $k = 250 \text{ kg/cm}$, redaman $m = 10 \text{ kg.detik}^2 / \text{m}$.



2. Sebuah lantai seberat $W = 300$ kg ditunjang oleh empat buah kolom yang sama dan diikat pada fondasi dan lantai. Secara eksperimental telah ditentukan gaya statis sebesar $F = 750$ N bekerja horizontal pada lantai itu dan mengakibatkan perpindahan sebesar $\Delta = 0,10$ in. Diperkirakan redaman pada struktur sebesar 5% dari redaman kritis.

Tentukanlah:

- (a) frekuensi natural tak teredam,
- (b) koefisien redaman absolut (*absolute damping coefficient*),
- (c) pengurangan logaritmis, dan
- (d) jumlah siklus dan waktu yang di perlukan supaya amplitudo gerakan ini berkurang dari harga awal 0,1 in menjadi 0,01 in.

BAB 3

RESPONS SISTEM BERDERAJAT KEBEBASAN TUNGGAL TERHADAP PEMBEBANAN HARMONIS

3.1. Pengaruh Harmonis Tak Terejam (Undamped Harmonic Excitation)

Gaya $F(t)$ yang bekerja pada osilator sederhana (*simple oscillator*) pada Gambar 3.1 dianggap harmonis dengan besar $F_0 \sin \bar{\omega}t$, dimana F_0 adalah amplitudo puncak dan $\bar{\omega}$ adalah frekuensi dari gaya dalam radian per detik. Persamaan diferensial diperoleh dari penjumlahan semua gaya pada diagram *free body* Gambar 3.2 (b), yaitu:

$$m\ddot{u} + ku = F_0 \sin \bar{\omega}t \quad (3.1)$$

Solusi dari Persamaan (3.1) dapat dinyatakan sebagai,

$$u(t) = u_c(t) + u_p(t) \quad (3.2)$$

Di mana $u_c(t)$ adalah solusi komplementer (*complementary solution*) yang memenuhi persamaan homogen, yaitu Persamaan (3.1) dimana bagian kiri sama dengan nol dan $u_p(t)$ adalah solusi partikular (*particular solution*) yang didasarkan pada solusi yang memenuhi persamaan diferensial tak homogen, Persamaan. (3.1) solusi komplementer $u_c(t)$ adalah

$$u_c(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (3.3)$$

Dimana $\omega = \sqrt{k/m}$

Melihat bentuk dari fungsi gaya pada Persamaan (3.1) disarankan untuk memilih solusi partikular seperti

$$u_p(t) = U \sin \bar{\omega}t \quad (3.4)$$

Dimana U adalah harga puncak (*peak value*) dari solusi partikular. Substitusi Persamaan (3.4) ke dalam Persamaan (3.1) dan hilangkan faktor yang sama, didapatkan

$$U = \frac{F_0}{k - m\bar{\omega}^2} = \frac{F_0/k}{1 - r^2} \quad (3.5)$$

Dimana r menyatakan *ratio (ratio frekuensi)* dari frekuensi gaya yang bekerja pada frekuensi natural getaran dari sistem (*natural frequency of system*) yaitu,

$$r = \frac{\bar{\omega}}{\omega} \quad (3.6)$$

Kombinasi Persamaan (3.3) dan Persamaan (3.5) dengan Persamaan (3.2) menghasilkan

$$u_c(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{F_0/k}{1 - r^2} \sin \bar{\omega}t \quad (3.7)$$

Jika kondisi awal (*initial conditions*) pada waktu $t = 0$ maka konstanta integrasi yang didapatkan dari Persamaan. (3.7) adalah

$$A = 0, \quad B = -\frac{rF_0/k}{1 - r^2}$$

Jika disubstitusikan pada Persamaan (3.7) memberikan

$$u(t) = \frac{F_0/k}{1 - r^2} (\sin \bar{\omega}t - r \sin \omega t) \quad (3.8)$$

Bagian frekuensi paksa (*forcing frequency*) pada Persamaan (3.8) adalah

$$u(t) = \frac{F_0/k}{1-r^2} \sin \bar{\omega}t \quad (3.9)$$

3.2. Pengaruh Harmonis Teredam (Damped Harmonic Excitation)

Persamaan diferensial gerak didapatkan dengan menyamakan jumlah gaya – gaya dari diagram *free body* Gambar 3.2 (b) dengan nol.

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F_0 \sin \bar{\omega}t \quad (3.10)$$

Solusi partikular didapatkan dengan mensubstitusi u_p yang pada keadaan ini dianggap mempunyai bentuk

$$u_p(t) = C_1 \sin \bar{\omega}t + C_2 \cos \bar{\omega}t \quad (3.11)$$

Ke dalam Persamaan (3.10) dan samakan koefisien dari fungsi sinus dan cosinus. Dengan mengikuti cara Euler, yaitu

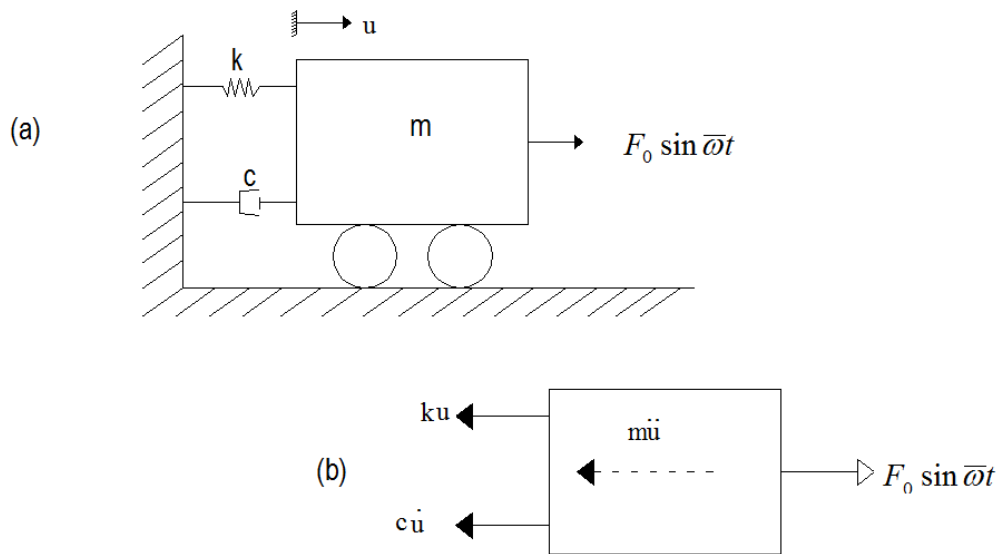
$$e^{i\bar{\omega}t} = \cos \bar{\omega}t + i \sin \bar{\omega}t \quad (3.12)$$

Dengan Persamaan (3.10) dapat ditulis sebagai

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F_0 e^{i\bar{\omega}t} \quad (3.13)$$

Solusi partikular dari Persamaan (3.13) berbentuk

$$u_p = C e^{i\bar{\omega}t} \quad (3.14)$$



Gambar 3. 1 Osilator teredam secara harmonis dan diagram *free body*

Substitusi Persamaan (3.14) ke dalam Persamaan (3.13) memberikan

$$u_p = \frac{F_0 e^{i\bar{\omega}t}}{k - m\bar{\omega}^2 + ic\bar{\omega}} \quad (3.15)$$

Dengan menggunakan bentuk koordinat polar, bilangan kompleks penyebut dari Persamaan (3.15) dapat ditulis sebagai

$$u_p = \frac{F_0 e^{i\bar{\omega}t}}{\sqrt{(k - m\bar{\omega}^2)^2 + (c\bar{\omega})^2} e^{i\theta}}$$

atau

$$u_p = \frac{F_0 e^{i(\bar{\omega}t - \theta)}}{\sqrt{(k - m\bar{\omega}^2)^2 + (c\bar{\omega})^2}} \quad (3.16)$$

dimana

$$\tan \theta = \frac{c\bar{\omega}^2}{k - m\bar{\omega}^2} \quad (3.17)$$

Respons untuk gaya $F_0 \sin \bar{\omega}t$ adalah komponen imajiner dari Persamaan (3.16) yaitu,

$$u_p = \frac{F_0 \sin(\bar{\omega}t - \theta)}{\sqrt{(k - m\bar{\omega}^2)^2 + (c\bar{\omega})^2}} \quad (3.18)$$

atau

$$u_p = U \sin(\bar{\omega}t - \theta) \quad (3.19)$$

Persamaan (3.18) dan Persamaan (3.17) dapat ditulis dengan baik sekali dalam bentuk *ratio* tanpa dimensi seperti

$$u_p = \frac{u_{st} \sin(\bar{\omega}t - \theta)}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad (3.20)$$

dan

$$\tan \theta = \frac{2\xi r}{1 - r^2} \quad (3.21)$$

Respons total didapat dari penjumlahan solusi komplementer (*response transien*) dari Persamaan (2.15) dan solusi partikular (respons keadaan tetap/*ready-state*) dari Persamaan (3.20) adalah

$$u(t) = e^{-\xi\alpha t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) + \frac{u_{st} \sin(\bar{\omega}t - \theta)}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \quad (3.22)$$

Ratio dari amplitudo keadaan tetap (*steady state amplitudo*) $u_p(t)$ dan lendutan u_{st} seperti yang didefinisikan sebelumnya, dikenal sebagai faktor pembesaran

dinamis (*dynamic magnification factor*) D yang diberikan oleh Persamaan (3.19) dan Persamaan (3.20) sebagai

$$D = \frac{U}{u_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \quad (3.23)$$

Berdasarkan Persamaan (3.23) dapat dilihat bahwa pada saat resonansi, faktor pembesaran dinamis berbanding terbalik dengan rasio redaman, yaitu

$$D(r = 1) = \frac{1}{2\xi} \quad (3.24)$$

3.3. Evaluasi Redaman Pada Saat Resonansi

Seperti yang terlihat pada Persamaan. (3.24) bahwa pada saat resonansi, *ratio* redaman diberikan oleh

$$\xi = \frac{1}{2D(r = 1)} \quad (3.25)$$

Dimana $D(r = 1)$ adalah faktor pembesaran dinamis yang dievaluasikan pada saat resonansi. Dalam praktek, *ratio* redaman ξ ditentukan dari evaluasi faktor pembesaran dinamis pada amplitudo maksimum, yaitu,

$$\xi = \frac{1}{2D_m} \quad (3.26)$$

Dimana

$$D_m = \frac{U_m}{u_{st}}, \text{ dengan}$$

$U_m =$ amplitudo *maximum*

$$u_{st} = \frac{F_0}{k} = \text{perpindahan statis}$$

3.4. Metoda *Band Width* Untuk Evaluasi Redaman

Istilah *Bandwidth* adalah perbedaan antara dua frekuensi sehubungan dengan respons amplitudo yang sama, yang dihubungkan dengan redaman dalam suatu sistem. Dalam evaluasi redaman adalah tepat bila mengukur *bandwidth* pada $1/\sqrt{2}$ kali amplitudo resonansi yang diberikan Persamaan (3.24) yaitu,

$$\frac{u_{st}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{u_{st}}{2\xi}$$

Persamaan di atas diselesaikan dengan mengkuadratkan kedua sisi yang menghasilkan *ratio* frekuensi, atau dengan menghilangkan ξ^2 pada bagian akar. Akhirnya *ratio* redaman diberikan hampir mendekati setengah perbedaan antara *ratio* frekuensi dari kedua “*halfpower*”, yaitu

$$\xi = \frac{1}{2}(r_2 - r_1)$$

atau

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{(\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1)}{\omega} = \frac{f_2 - f_1}{f_2 + f_1} \quad (3.27)$$

3.5. Respons Dari Gerakan Penyokong (Response To Support Motion)

Perhatikan Gambar 3.2, keadaan dimana penyokong dari sebuah model osilator sederhana dipengaruhi oleh gerak harmonis yang diberikan oleh pernyataan

$$u_s(t) = u_0 \sin \bar{\omega}t \quad (3.28)$$

Sehubungan dengan diagram *free body* pada Gambar 3.10(b), maka jumlah gaya-gaya pada arah horizontal memberikan

$$m\ddot{u} + c(\dot{u} - \dot{u}_s) + k(u - u_s) = 0 \quad (3.29)$$

Substitusi Persamaan (3.28) kedalam Persamaan (3.29) dan sesuaikan, didapat,

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = ku_0 \sin \bar{\omega}t + c\bar{\omega}y_0 \cos \bar{\omega}t \quad (3.30)$$

Dua bagian harmonis dari frekuensi $\bar{\omega}$ disebelah kanan persamaan dapat dikombinasikan dan Persamaan (3.30) dapat ditulis lagi sebagai

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F_0 \sin(\bar{\omega}t + \beta) \quad (3.31)$$

dimana

$$F_0 = u_0 \sqrt{k^2 + (c\bar{\omega})^2} = u_0 k \sqrt{1 + (2r\xi)^2} \quad (3.32)$$

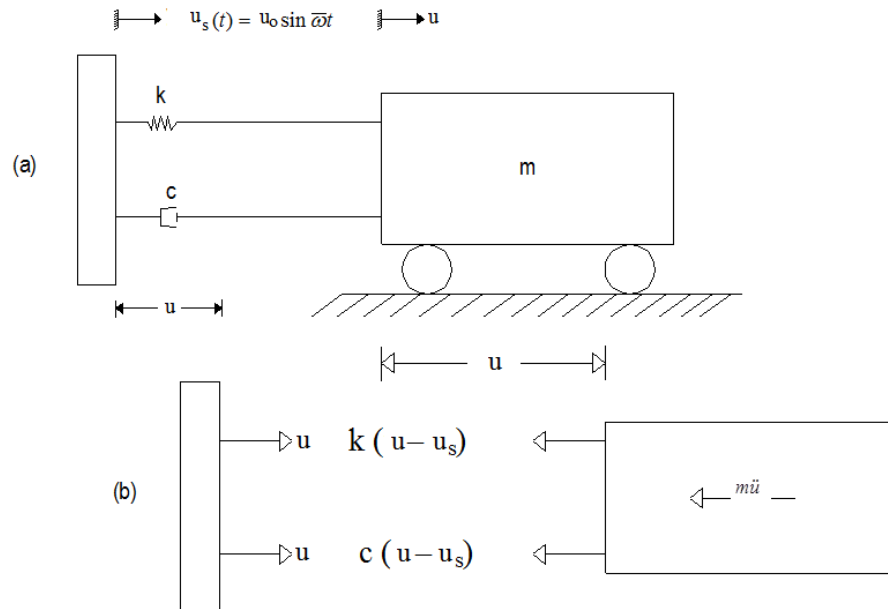
dan

$$\tan \beta = c\bar{\omega} / k = 2r\xi \quad (3.33)$$

Pada saat keadaan tetap (*steady state*) Persamaan (3.31) bila ditambah sudut β pada fungsi sinus akan menghasilkan

$$u(t) = \frac{F_0 / k \sin(\bar{\omega} + \beta - \theta)}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \quad (3.34)$$

atau substitusi F_0 dari Persamaan (3.32)



Gambar 3. 2 Osilator sederhana terendam secara harmonis dan Diagram *free body*

$$\frac{u(t)}{u_0} = \frac{\sqrt{1 + (2r\xi)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \sin(\bar{\omega} + \beta - \theta) \quad (3.35)$$

Derajat dari isolasi relatif dikenal sebagai transmisibilitas (*transmissibility*) dan didefinisikan sebagai *ratio* amplitudo dari gerak osilator U dan amplitudo u_0 dari gerakan penyokong. Persamaan. (3.35) transmisibilitas T_r diberikan oleh

$$T_r = \frac{U}{u_0} = \frac{\sqrt{1 + (2r\xi)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \quad (3.36)$$

Persamaan (3.34) memberikan respons absolut dari osilator redaman pada gerak harmonis dari dasar (*base*). Alternatif lain adalah, menyelesaikan persamaan diferensial Persamaan (3.29) dalam besaran dari gerak relatif antara massa m dan penyokong (*support*), yang diberikan oleh

$$u = u - u_s \quad (3.37)$$

Kemudian substitusikan ke dalam Persamaan (3.29) memberikan

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F_{eff}(t) \quad (3.38)$$

Dengan menggunakan Persamaan (3.28) untuk mendapatkan u_s dan disubstitusikan ke dalam Persamaan (3.38) memberikan

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = mu_0\bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega}t \quad (3.39)$$

Selanjutnya, dari Persamaan (3.20), respons keadaan tetap (*steady state*) dalam besaran gerak relatif, diberikan oleh

$$u(t) = \frac{mu_0\bar{\omega}^2 / k \sin(\bar{\omega}t - \theta)}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \quad (3.40)$$

atau substitusi

$$\frac{\bar{\omega}^2}{k/m} = \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2} = r^2$$

Didapatkan

$$\frac{u(t)}{u_0} = \frac{r^2 \sin(\bar{\omega}t - \theta)}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \quad (3.41)$$

3.6. Penyaluran Gaya Ke fondasi

Osilasi teredam dengan gaya harmonis $F(t) = F_0 \sin \bar{\omega} t$ yang bekerja pada massanya seperti pada Gambar 3.2 persamaan diferensial dari gerak ini adalah

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F_0 \sin \bar{\omega} t$$

Dengan solusi keadaan tetap (*steady state*)

$$u = U \sin(\bar{\omega} t - \theta)$$

dimana

$$U = \frac{F_0 / k}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \quad (3.42)$$

dan

$$\tan \theta = \frac{2\xi r}{1 - r^2}$$

Gaya tersalur ke penyokong melalui pegas ku dan $c\dot{u}$. Sekarang gaya total F_T yang tersalur adalah

$$F_T = ku + c\dot{u} \quad (3.43)$$

Diferensial Persamaan (3.19) dan substitusi ke dalam Persamaan (3.43) memberikan

$$F_T = U \sqrt{k^2 + c^2 \bar{\omega}^2} \sin(\bar{\omega} t - \theta + \beta) \quad (3.44)$$

$$F_T = U \sqrt{k^2 + c^2 \bar{\omega}^2} \sin(\bar{\omega} t - \phi) \quad (3.45)$$

dimana

$$\tan \beta = \frac{c\bar{\omega}}{k} = 2\xi r \quad (3.46)$$

dan

$$\phi = \theta - \beta \quad (3.47)$$

Kemudian dari Persamaan (3.42) dan (3.45), gaya maksimum A_T yang tersalur ke fondasi adalah

$$A_T = F_0 \sqrt{\frac{1 + (2r\xi)^2}{(1 - r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \quad (3.48)$$

Dari persamaan di atas diketahui nilai transmisibilitas,

$$T_r = \frac{A_T}{F_0} = \sqrt{\frac{1 + (2r\xi)^2}{(1 - r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \quad (3.49)$$

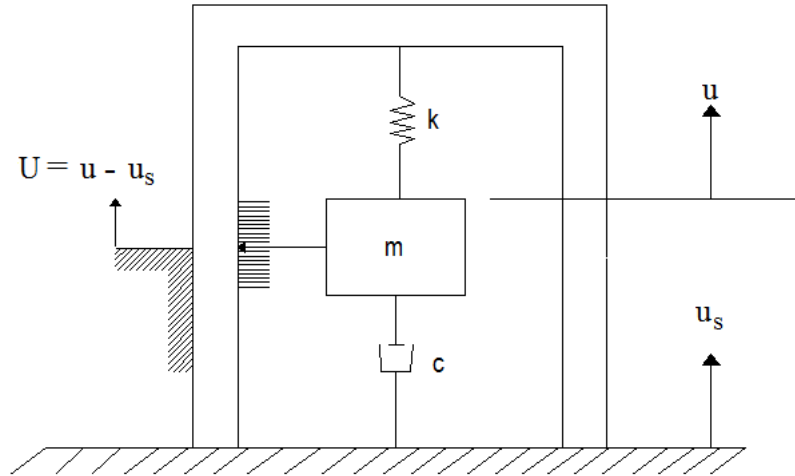
Untuk menentukan sudut total substitusikan $\tan \theta$ dan $\tan \beta$ secara bersama dari Persamaan (3.21) dan (3.46), didapatkan

$$\tan \phi = \frac{2\xi r^3}{1 - r^2 + 4\xi^2 r^2} \quad (3.50)$$

3.7. Instrumen Gempa (*Seismic Instrument*)

Salah satu instrumen gempa adalah *Seismograph* yang direncanakan untuk mengukur perpindahan dan percepatan dari alasnya (*base*). Respons puncak relatif U/u_0 dari *seismograph* seperti tergambar pada Gambar 3.13, untuk gerak harmonik dari alas diberikan oleh Persamaan (3.41).

$$\frac{U}{u_0} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \quad (3.51)$$



Gambar 3. 3 Model seismograph pengukur besaran gempa bumi

Jika rasio frekuensi $r > 1$ dan *ratio* redaman $\xi = 0,5$ maka respons sistem yang terjadi hampir konstan/tetap. Respons dari instrumen tersebut akibat percepatan harmonis dari alas $\ddot{u}_s = \ddot{u}_0 \sin \bar{\omega}t$. Persamaan gerak sistem didapat dari Persamaan (3.38) sebagai

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -mu_0\bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega}t \quad (3.52)$$

Respons keadaan tetap (*steady state*) sistem ini, yang dinyatakan sebagai faktor pembesaran dinamis, diberikan oleh Persamaan. (3.23)

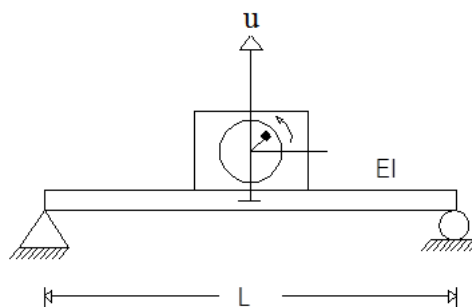
$$D = \frac{U}{m\ddot{u}_0/k} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \quad (3.53)$$

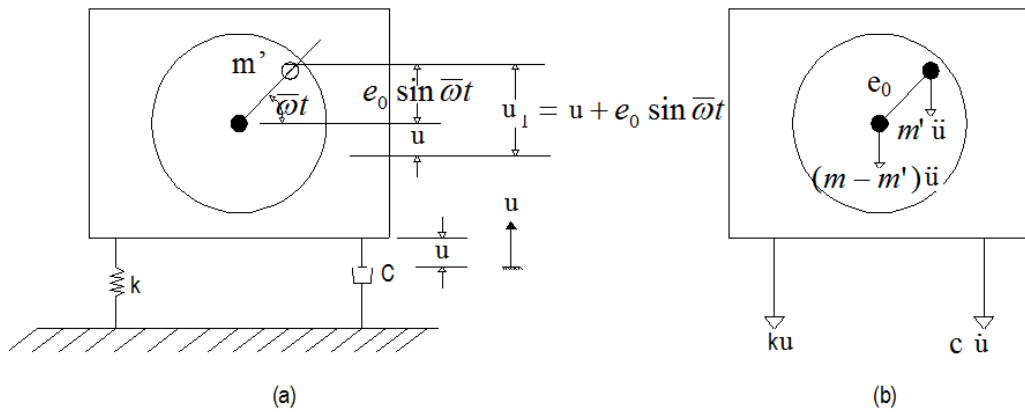
Berdasarkan Persamaan. (3.53) terlihat jelas bahwa respons instrumen ini akan selalu selaras dengan amplitudo percepatan alas untuk frekuensi sampai dengan enam persepuluh frekuensi natural.

3.8 Contoh Soal dan Penyelesaian

Contoh 3.1.

Sebuah balok pada tengah bentangnya memikul sebuah mesin dengan berat $W=16.000$ lb. Balok ini terbuat dari dua profil *standard S8 x 23* dengan bentang bersih $L = 12$ ft dan dengan momen inersia penampang total $I = 2 \times 64,2 = 128,4$ in⁴. Motor berotasi pada 300 rpm (putaran per menit), dengan ketidak seimbangan rotornya sebesar $W'=40$ lb pada jari-jari $e_0 = 10$ in. Berapa besar amplitudo dari respons keadaan tetap (*ready state response*) jika redaman liat (*viscous damping*) dianggap ekuivalen dengan 10% redaman kritis?





Sistem dinamis ini dapat dimodelisasikan sebagai osilator teredam. Distribusi masa balok diabaikan, dibandingkan dengan massa besar dari mesin. Gambar 3.5 dan Gambar 3.6, secara bersama merupakan diagram skematis dari sistem mesin balok dan model yang digunakan. Gaya pada tengah bentang balok, dilendutkan sebesar satu unit besaran (yaitu, koefisien kekakuan) yang bentuknya adalah,

$$k = \frac{48EI}{L^3} = \frac{48 \times 30 \times 10^6 \times 128,4}{(144)^3} = 61,920 \text{ lb/in}$$

Frekuensi natural dari sistem (mengabaikan massa dari balok) adalah

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{61,920}{16000/386}} = 38,65 \text{ rad/det}$$

Frekuensi gaya

$$\bar{\omega} = \frac{300 \times 2\pi}{60} = 31,41 \text{ rad/det}$$

Dan *ratio* frekuensi

$$r = \frac{\bar{\omega}}{\omega} = \frac{31,41}{38,65} = 0,813$$

Sesuai dengan Gambar 3.6. ambil m sebagai massa total dari m' massa yang berotasi tak seimbang dan, bila y adalah perpindahan vertikal dari massa yang tak berotasi ($m - m'$) dari posisi keseimbangan, perpindahan y_1 dari massa m' seperti ditunjukkan Gambar 3.6 adalah

$$u_1 = u + e_0 \sin \bar{\omega}t \quad (a)$$

Gambar (3.6) dimana gaya-gaya inersia dari massa tak berotasi dan massa tak seimbang juga terlihat dengan jelas. Penjumlahan ini menjadi

$$(m - m')\ddot{u} + m'\ddot{u}_1 + c\dot{u} + ku = 0 \quad (b)$$

Substitusi u_1 dari Persamaan (a) memberikan

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = m'e_0\bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega}t \quad (c)$$

Persamaan ini sama dengan bentuk persamaan gerak untuk osilator teredam yang dipengaruhi secara harmonis oleh gaya yang beramplitudo.

$$F_0 = m'e_0\bar{\omega}^2 \quad (d)$$

Dengan mensubstitusikan angka-angka yang sesuai dengan contoh ini didapatkan

$$F_0 = (40)(10)(31,41)^2 / 386 = 1022 \text{ lb}$$

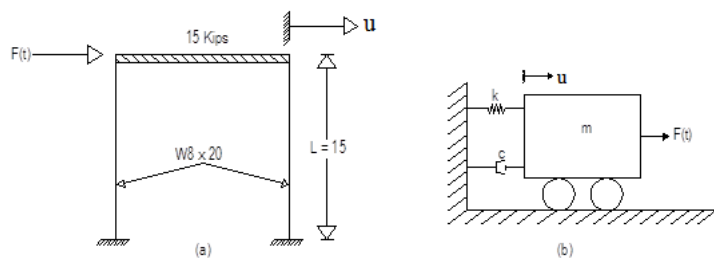
Amplitudo dari gerak keadaan tetap didapat dari Persamaan (3.20) yaitu

$$u_p = \frac{1022 / 61,920}{\sqrt{(1 - 0,813^2)^2 + (2 \times 0,813 \times 0,1)^2}} = 0,044 \text{ in}$$

Contoh 3.2.

Sebuah kerangka baja pada Gambar 3.7 memikul sebuah mesin rotasi yang mengakibatkan gaya horizontal pada bidang balok sebesar $F(t) = 200 \sin 5,3t$, lb. Dianggap redaman sebesar 5% redaman kritis. Tentukan,

- Amplitudo keadaan tetap dari getaran dan
- Tegangan dinamis *maximum* pada kolom dengan anggapan balok sangat kaku.



Struktur ini dapat dimodelisasikan sebagai osilator teredam untuk analisis dinamis, seperti pada Gambar 3.7(b). Parameter-parameter pada model ini dihitung sebagai berikut

$$k = \frac{3E(2I)}{L^3} = \frac{3 \times 30 \times 10^6 \times 2 \times 69,2}{(12 \times 15)^3} = 2136 \text{ lb/in}$$

$$\xi = 0,05$$

$$u_{st} = \frac{F_0}{k} = \frac{200}{2136} = 0,0936 \text{ in}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2136 \times 386}{15000}} = 7,41 \text{ rad/det}$$

$$r = \frac{\bar{\omega}}{\omega} = \frac{5,3}{7,41} = 0,715$$

Kemudian amplitudo keadaan tetap dari Persamaan. (3.20) adalah

$$U = \frac{u_{st}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} = 0,189 \text{ in}$$

Dan gaya geser maksimum pada kolom

$$V_{\max} = \frac{3EIU}{L^3} = 201,8 \text{ lb}$$

Momen lentur maksimum pada kolom adalah

$$M_{\max} = V_{\max} L = 36,324 \text{ lb.in}$$

Dan tegangan *maximum*

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I/c} = \frac{36,324}{17} = 2136 \text{ psi}$$

Dimana I/c adalah modulus penampang.

Contoh 3.3.

Data *experimental* untuk respons frekuensi dari sistem berderajat – kebebasan satu diplot pada Gambar 3.9. Tentukan *ratio* redaman dari sistem. Amplitudo diasumsikan seperti terdapat pada Gambar 3.9., dengan amplitudo puncak adalah 0,1134 in, oleh karena itu amplitudo pada “*halfpower*” sama dengan

$$0,1134/\sqrt{2} = 0,0802 \text{ in}$$

Frekuensi pada amplitudo ini didapat dari Gambar 3.9 adalah,

$$f_1 = 17,05$$

$$f_2 = 18,92$$

ratio redaman dihitung dari Persamaan (3.27) adalah

$$\xi = \frac{f_2 - f_1}{f_2 + f_1} = \frac{18,92 - 17,05}{18,92 + 17,05} = 5,2\%$$

Contoh 3.4

Jika kerangka pada Contoh 3.2 Gambar 3.7 dipengaruhi gerakan tanah sinusoidal

$u_s(t) = 0,2 \sin 5,3t$, tentukan:

- (a) transmisibilitas dari gerak balok,
- (b) gaya geser *maximum* pada kolom penyanggong, dan
- (c) tegangan *maximum* pada kolom.

Parameter – parameter dari sistem ini

$$k = 2136 \text{ lb/in}$$

$$\xi = 0,05,$$

$$u_0 = 0,2 \text{ in}$$

$$\omega = 7,41 \text{ rad/det}$$

$$\bar{\omega} = 5,3 \text{ rad/det}$$

$$r = 0,715$$

transmisibilitas dari Persamaan (3.36) adalah

$$T_r = \frac{\sqrt{1 + (2r\xi)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2r\xi)^2}} = 2,1$$

Perpindahan *relatif maximum* U dari Persamaan (3.41) adalah

$$U_{\max} = \frac{U}{u_0} = \frac{u_0 r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2r\xi)^2}} = 0,206 \text{ in}$$

Kemudian gaya geser maksimum V_{\max} dari Persamaan (3.41) adalah

$$V_{\max} = \frac{kU}{2} = 219,8 \text{ lb}$$

Momen lentur *maximum*

$$M_{\max} = V_{\max} L = 39,567 \text{ lb.in}$$

Dan tegangannya

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I/c} = \frac{39,67}{17} = 2327 \text{ psi}$$

Dimana I/c adalah modulus penampang.

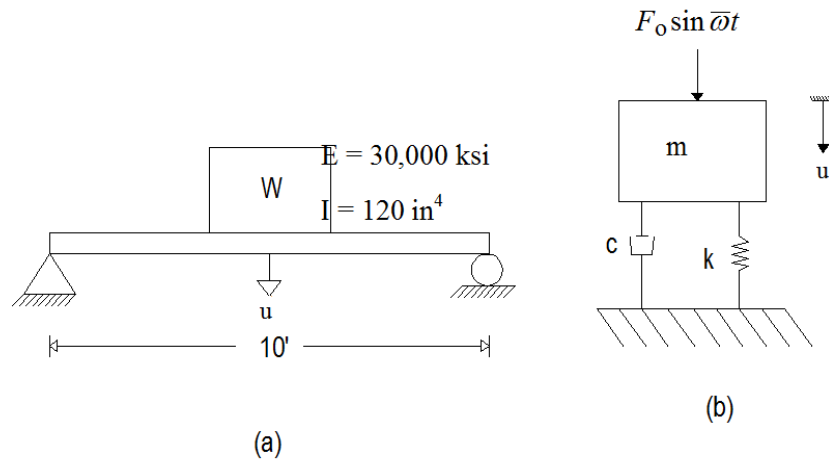
Contoh 3.5.

Sebuah mesin dengan berat $W = 3860 \text{ lb}$ dipasang pada balok baja ber perletakan sederhana seperti pada Gambar 3.12. sebuah torak yang bergerak ke atas dan ke bawah pada mesin itu menimbulkan gaya harmonis sebesar $F_0 = 7000 \text{ lb}$ dan frekuensi $\bar{\omega} = 60 \text{ rad/detik}$. Abaikan berat dari balok dan anggap redaman sebesar 10% redaman kritis; tentukan

(a) amplitudo dari gerak mesin,

(b) gaya yang tersalurkan ke penyokong batang/perletakan, dan

(c) sudut fasa yang bersangkutan.



Parameter – parameter berikut ini dihitung:

$$k = \frac{48EI}{L^3} = 10^5 \text{ lb/in}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 100 \text{ rad/det}$$

$$\xi = 0,1$$

$$r = \frac{\bar{\omega}}{\omega} = 0,6$$

$$u_{st} = \frac{F_0}{k} = 0,07 \text{ in}$$

a. Berdasarkan Persamaan (3.20), amplitudo dari gerak adalah

$$U = \frac{u_{st}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} = 0,1075 \text{ in}$$

- b. Dengan satu sudut fasa dari Persamaan (3.21)

$$\theta = \tan^{-1} \frac{2r\xi}{1-r^2} = 10,6^\circ$$

Berdasarkan Persamaan (3.48), transmisibilitas adalah

$$T_r = \frac{A_r}{F_0} = \sqrt{\frac{1+(2r\xi)^2}{(1-r^2)^2+(2r\xi)^2}} = 1,547$$

Jadi amplitudo yang disalurkan ke fondasi

$$A_r = F_0 T_r = 10,827$$

- c. Sudut fasa yang bersangkutan dari Persamaan (3.50)

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2\xi r^3}{1-r^2+4\xi^2 r^2} = 3,78^\circ$$

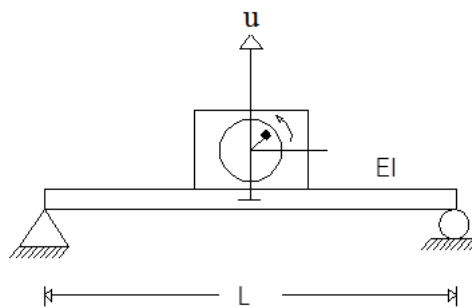
3.9 Rangkuman

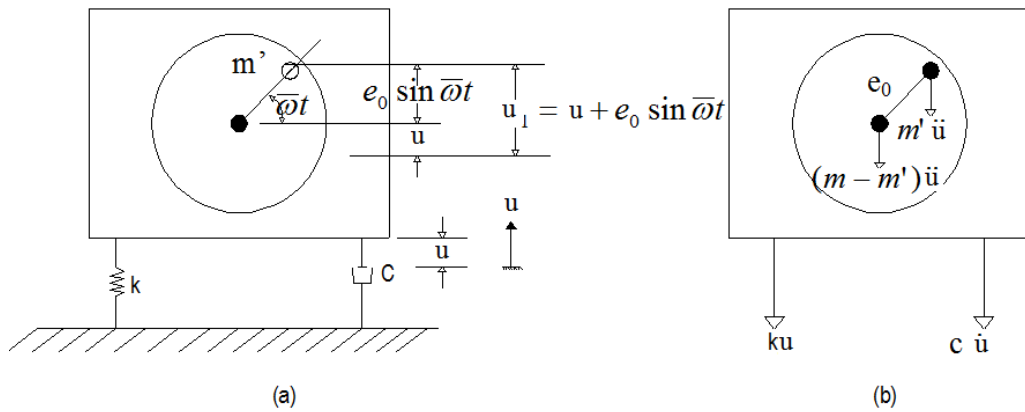
- Respons struktur dengan sistem persamaan gerak tak teredam akibat pembebanan harmonis terjadi jika beban luar merupakan beban dengan fungsi sinusoidal ataupun cosiodal.
- Resonansi dapat terjadi jika nilai perioda dan frekuensi alami struktur hampir sama atau bahkan sama dengan nilai perioda dan frekuensi dari beban luar.
- Bandwidth adalah perbedaan antara dua frekuensi sehubungan dengan respons amplitudo yang sama, yang dihubungkan dengan redaman dalam suatu sistem.

- Dalam evaluasi redaman, bandwidth adalah sama dengan $1/\sqrt{2}$ kali amplitudo resonansi.

3.10 Soal latihan

1. Sebuah balok pada tengah bentangnya memikul sebuah mesin dengan berat $W=20$ KN. Balok ini terbuat dari dua profil *standard* S8 x 23 dengan bentang bersih $L = 3$ meter dan dengan momen inersia penampang total $I = 64$ cm⁴. Motor berotasi pada 300 rpm (putaran per menit), dengan ketidak seimbangan rotornya sebesar $W'=10$ KN pada jari-jari $e_0 = 5$ cm. Berapa besar amplitudo dari respons keadaan tetap (*ready state response*) jika redaman liat (*viscous damping*) dianggap ekuivalen dengan 5% redaman kritis?

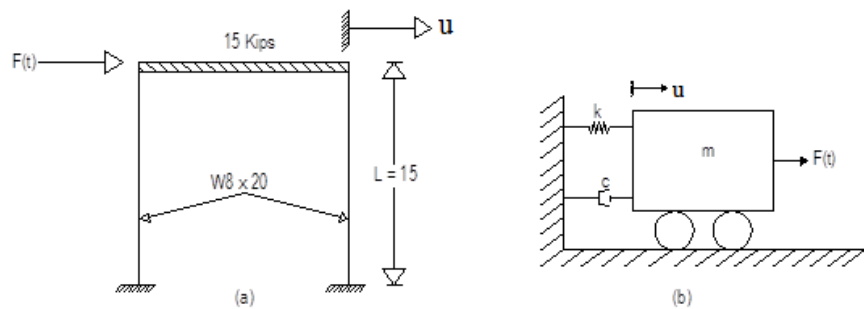




2. Sebuah kerangka baja pada gambar di bawah ini memikul sebuah mesin rotasi yang mengakibatkan gaya horizontal pada bidang balok sebesar $F(t) = 100 \sin 5,3t$ KN. Dianggap redaman sebesar 5% redaman kritis.

Tentukanlah:

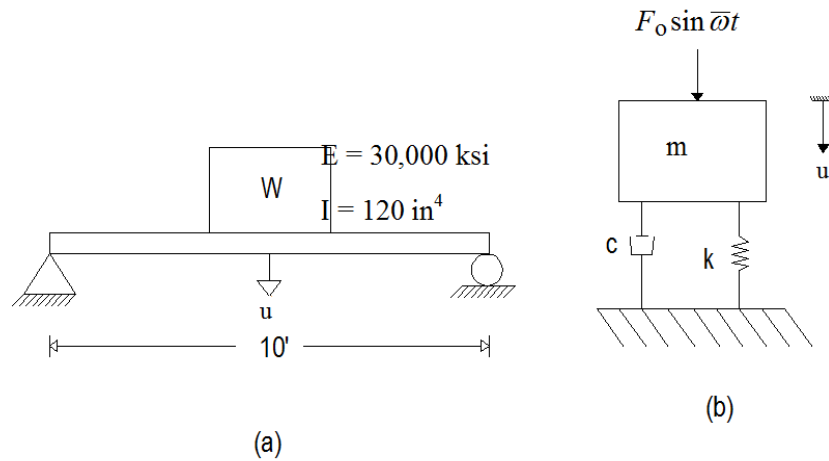
- Amplitudo keadaan tetap dari getaran dan
- Tegangan dinamis *maximum* pada kolom dengan anggapan balok sangat kaku.



3. Sebuah mesin dengan berat $W = 400$ lb dipasang pada balok baja ber perletakan sederhana seperti pada gambar di bawah ini. sebuah torak yang bergerak ke atas dan ke bawah pada mesin itu menimbulkan gaya harmonis sebesar $F_0 = 500$ lb

dan frekuensi $\bar{\omega} = 60$ rad/detik. Abaikan berat dari balok dan anggap redaman sebesar 5% redaman kritis; tentukan

- amplitudo dari gerak mesin,
- gaya yang tersulur ke penyokong batang/perletakan, dan
- sudut fasa yang bersangkutan.



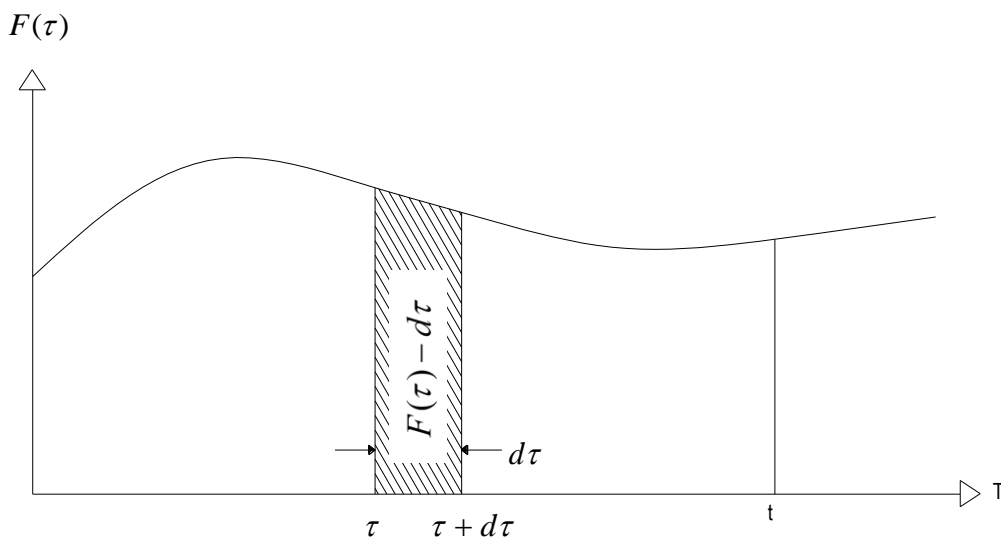
BAB 4

RESPONS SISTEM BERDERAJAT KEBEBASAN TUNGGAL TERHADAP PEMBEBANAN DINAMIS

4.1. Pembebanan Impuls Dan Integrasi Duhamel (*Impulsive Loading And Duhamel's Integral*)

Pembebanan impuls adalah pembebanan yang berlangsung dalam sengkang waktu yang singkat. Contoh, impuls dari suatu gaya $F(t)$ digambarkan, pada Gambar 4.1, impuls ini bekerja pada massa m yang dapat ditentukan dari hukum gerak Newton, seperti

$$m \frac{dv}{d\tau} = F(\tau)$$



Gambar 4. 1 Fungsi gaya impuls umum

Diatur kembali sehingga didapat

$$dv = \frac{d\tau F(\tau)}{m} \tag{4.1}$$

Dimana $F(\tau)d\tau$ adalah impuls dan dv adalah pertambahan kecepatan. Pada waktu τ , osilator mengalami perubahan kecepatan, diberikan oleh Persamaan. (4.1). Perubahan kecepatan ini dimasukkan pada Persamaan (1.20) sebagai kecepatan awal v_0 bersama dengan perpindahan awal $y_0 = 0$ pada waktu τ , yang mengakibatkan perpindahan pada waktu berikutnya τ diberikan oleh

$$du(t) = \frac{F(\tau)d\tau}{m\omega} \sin \omega(t - \tau) \quad (4.2)$$

Dapat disimpulkan bahwa perpindahan total pada waktu τ akibat suatu aksi berkesinambungan dari gaya $F(\tau)$ diberikan oleh penjumlahan atau integral dari perpindahan differensial $du(\tau)$ dari waktu $t = 0$ sampai waktu t , yaitu

$$u(\tau) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t F(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau \quad (4.3)$$

Integral pada persamaan ini dikenal sebagai integral *Duhamel*, jadi perpindahan total dari sistem tak teredam berderajat kebebasan tunggal dengan gaya yang berubah, diberikan oleh

$$u(\tau) = y_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{1}{m\omega} \int_0^t F(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau \quad (4.4)$$

4.2. Gaya Konstan

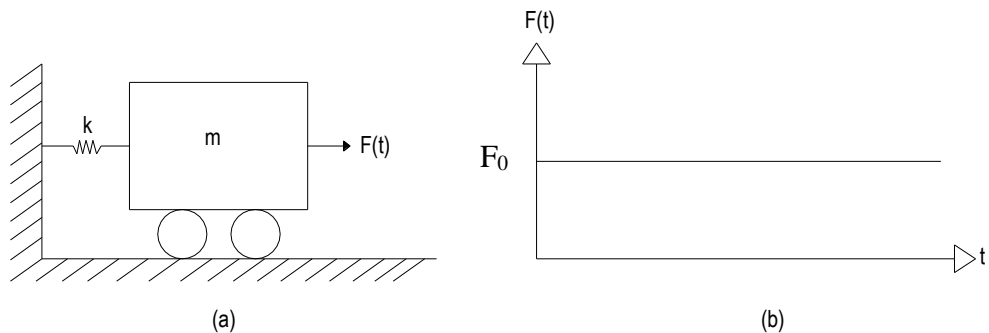
Untuk perpindahan awal dan kecepatan awal sama dengan nol, maka penggunaan Persamaan (4.4) memberikan memberikan

$$u(\tau) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t F_0 \sin \omega(t - \tau) d\tau$$

Diintegrasikan menjadi

$$u(\tau) = \frac{F_0}{m\omega} \left[\cos \omega(t - \tau) \right]_0^t ,$$

$$u(\tau) = \frac{F_0}{k} (1 - \cos \omega t) = u_{st} (1 - \cos \omega t) \quad (4.5)$$



Gambar 4. 2 Gaya tetap yang bekerja pada osilator tak teredam

Respons dari pembebanan gaya konstan secara tiba-tiba ini telah menemukan hasil yang mendasar berupa perpindahan maksimum dari sistem elastis linear akibat gaya konstan yang bekerja secara tiba-tiba. Besarnya gaya ini adalah dua kali perpindahan yang disebabkan oleh gaya yang sama dan bekerja secara statis.

4.2.1 Beban Segi Empat

Untuk respons sesudah waktu t_d digunakan Persamaan (1.20) untuk getaran bebas dimana kondisi awal untuk perpindahan dan kecepatan adalah kondisi pada saat t_d .

$$u(\tau) = \frac{F_0}{k}(1 - \cos \omega t_d) \cos \omega(t - t_d) + \frac{F_0}{k} \sin \omega t_d \sin \omega(t - t_d)$$

Yang dapat disederhanakan menjadi

$$u(\tau) = \frac{F_0}{k} \{ \cos \omega(t - t_d) - \cos \omega t \} \quad (4.6)$$

Jika Faktor Beban Dinamis (FBD) didefinisikan sebagai perpindahan pada setiap waktu t dibagi dengan perpindahan statis $u_{st} = \frac{F_0}{k}$, Persamaan (4.5) dan

Persamaan (4.6) dapat ditulis sebagai

$$FBD = 1 - \cos \omega t, \quad t \leq t_d$$

dan

$$FBD = \cos \omega(t - t_d) - \cos \omega t, \quad t \geq t_d \quad (4.7)$$

Bila digunakan periode natural sebagai pengganti frekuensi natural $\omega = 2\pi/T$, hingga Persamaan (4.7) dapat ditulis sebagai

$$FBD = \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{t_d}{T}\right) - \cos 2\pi \frac{t}{T}, \quad t \geq t_d \quad (4.8)$$

Faktor beban dinamis maksimum $(FBD)_{maks}$ didapat dari harga maksimum Persamaan (4.8). Grafik respons *maksimum* dari sistem berderajat-kebebasan-tunggal untuk fungsi beban disebut grafik respons spektra (*response spectra*).

4.2.2 Beban Segitiga

Substitusikan harga – harga ini $u_0 = 0$, dan $v_0 = 0$ ke dalam Persamaan (4.4) dan diintegrasikan akan memberikan

$$u(\tau) = \frac{F_0}{k}(1 - \cos \omega t) + \frac{F_0}{k t_d} \left(\frac{\sin \omega t}{\omega} - t \right) \quad (4.9)$$

atau dalam besaran faktor beban dinamis dan parameter tak berdimensi

$$FBD = \frac{u}{u_{st}} = 1 - \cos \omega(2\pi t/T) + \frac{\sin(2\pi t/T)}{2\pi t_d/T} - \frac{t}{t_d} \quad (4.10)$$

Untuk interval kedua ($t \geq t_d$), diperoleh dari Persamaan (4.9) perpindahan dan kecepatan pada waktu t_d sebagai

$$v_d = \frac{F_0}{k} \left(\omega \sin \omega t_d + \frac{\cos \omega t_d}{t_d} - \frac{1}{t_d} \right) \quad (4.11)$$

Persamaan (1.20) gantikan t dengan $t - t_d$, $y_0 - y_d$, v_0 dengan v_d ; dan $f(t) = 0$ pada interval ini, didapatkan respons seperti

$$u = \frac{F_0}{k \omega t_d} \{ \sin \omega t - \sin \omega(t - t_d) \} - \frac{F_0}{k} \cos \omega t$$

dan dibagi dengan $u_{st} = F_0/k$ memberikan

$$FBD = \frac{1}{\omega t_d} \{ \sin \omega t - \sin \omega(t - t_d) \} - \cos \omega t \quad (4.12)$$

Dalam besaran parameter waktu yang tak berdimensi, persamaan yang terakhir ini dapat ditulis sebagai

$$FBD = \frac{1}{2\pi t_d/T} \left\{ \sin 2\pi \frac{t}{T} - \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{t_d}{T} \right) \right\} - \cos 2\pi \frac{t}{T} \quad (4.13)$$

4.3 Evaluasi Numerik Dari Integral Duhamel Untuk Sistem Tak Tereadam

Pada bagian ini kondisi awal sistem dianggap sama dengan nol, maka didapatkan integral Duhamel, Persamaan (4.4) dalam bentuk,

$$u(\tau) = \sin \omega t \frac{1}{m\omega} \int_0^t F(\tau) \cos \omega t d\tau - \cos \omega t \frac{1}{m\omega} \int_0^t F(\tau) \sin \omega t d\tau$$

atau

$$u(\tau) = \{A(t) \sin \omega t - B(t) \cos \omega t\} / m\omega \quad (4.14)$$

dimana

$$A(\tau) = \int_0^t F(\tau) \cos \omega t d\tau$$

$$B(\tau) = \int_0^t F(\tau) \sin \omega t d\tau \quad (4.15)$$

Perhitungan integral Duhamel memerlukan evaluasi integral A(t) dan B(t) secara numerik. Metoda yang paling umum digunakan dalam menyelesaikan persamaan ini adalah Hukum Trapezium (*trapezoidal rule*) dan Hukum Simpson (*Simpson's rule*). Rumusan integrasi dapat diturunkan dari suatu fungsi I(τ) berikut ini:

$$A(\tau) = \int_0^t I(\tau) d\tau$$

Operasi dasar yang diperlukan untuk trapezium (*trapezoidal rule*) adalah

$$A(\tau) = \Delta\tau \frac{1}{2}(I_0 + 2I_1 + 2I_2 + \dots + 2I_{n-1} + I_n) \quad (4.16)$$

Dan untuk hukum Simpson (*Simpson's rule*)

$$A(\tau) = \Delta\tau \frac{1}{3}(I_0 + 4I_1 + 2I_2 + \dots + 4I_{n-1} + I_n) \quad (4.17)$$

Dimana untuk Hukum Simpson, $n = \frac{t}{\Delta\tau}$ harus genap. Dalam menggunakan metoda ini, dianggap fungsi beban $F(\tau)$ dapat didekati oleh bagian-bagian fungsi linier seperti pada Gambar 4.6. Untuk menggambarkan sejarah lengkap dari respons, adalah lebih tepat bila menyatakan integrasi pada Persamaan (4.15) dalam bentuk pertambahan (*incremental form*), sebagai berikut

$$A(t_i) = A(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(\tau) \cos \omega t d\tau \quad (4.18)$$

$$B(t_i) = B(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(\tau) \sin \omega t d\tau \quad (4.19)$$

Dengan menganggap bahwa fungsi gaya $F(t)$ didekati oleh bagian-bagian fungsi linier maka dapat ditulis sebagai berikut:

$$F(\tau) = F(t_{i-1}) + \frac{\Delta F_i}{\Delta t_i} (\tau - t_{i-1}), \quad t_{i-1} \leq \tau \leq t_i \quad (4.20)$$

dimana

$$\Delta F_i = F(t_i) - F(t_{i-1})$$

dan

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$$

Substitusi dari Persamaan (4.20) ke dalam Persamaan (4.18) dan diintegrasikan, akan memberikan

$$A(t_i) = A(t_{i-1}) + \left(F(t_{i-1}) - t_{i-1} \frac{\Delta F_i}{\Delta t_i} \right) (\sin \omega t_i - \sin \omega t_{i-1}) / \omega + \frac{\Delta F_i}{\omega^2 \Delta t_i} \{ \cos \omega t_i - \cos \omega t_{i-1} + \omega(t_i \sin \omega t_i - t_{i-1} \sin \omega t_{i-1}) \} \quad (4.21)$$

Demikian juga dengan Persamaan (4.19)

$$B(t_i) = B(t_{i-1}) + \left(F(t_{i-1}) - t_{i-1} \frac{\Delta F_i}{\Delta t_i} \right) (\cos \omega t_i - \cos \omega t_{i-1}) / \omega + \frac{\Delta F_i}{\omega^2 \Delta t_i} \{ \sin \omega t_i - \sin \omega t_{i-1} + \omega(t_i \cos \omega t_i - t_{i-1} \cos \omega t_{i-1}) \} \quad (4.22)$$

Persamaan (4.21) dan (4.22) adalah bentuk yang sering digunakan untuk mengevaluasi integral pada Persamaan (4.15) pada saat $t = t_i$.

4.4 Evaluasi Numerik Integral Duhamel Untuk Sistem Teredam

Dengan menentukan $u_0 = 0$, $v_0 = F(\tau)d\tau / m$, dan substitusi $t - \tau$ untuk t pada Persamaan (2.20), didapatkan persamaan diferensial perpindahan pada saat t adalah

$$du(t) = e^{-\xi\omega(t-\tau)} \frac{F(\tau)d\tau}{m\omega_D} \sin \omega_D(t - \tau) \quad (4.23)$$

Jumlah bagian respons diferensial dari semua selang pembebanan, menghasilkan

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t F(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin \omega_D(t-\tau) d\tau \quad (4.24)$$

Persamaan ini merupakan respons dari sistem teredam dalam bentuk integral Duhamel. Untuk evaluasi numerik, diproses seperti pada kondisi tak teredam dan dari Persamaan (4.24) didapatkan,

$$u(t) = \{A_D(t) \sin \omega_D t - B_D(t) \cos \omega_D t\} \frac{e^{-\xi\omega(t-\tau)}}{m\omega_D} \quad (4.25)$$

dimana

$$A_D(t_i) = \{A_D(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \cos \omega_D \tau d\tau\} \quad (4.26)$$

$$B_D(t_i) = \{B_D(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin \omega_D \tau d\tau\} \quad (4.27)$$

Untuk semua bagian fungsi pembebanan linier, $F(\tau)$ dari Persamaan (4.20) disubstitusikan dalam Persamaan (4.26) dan (4.27) yang memerlukan evaluasi integral sebagai berikut,

$$I_1 = \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{\xi\omega\tau} \cos \omega_D \tau d\tau = \frac{e^{\xi\omega\tau}}{(\xi\omega)^2 + \omega_D^2} (\xi\omega \cos \omega_D \tau + \omega_D \sin \omega_D \tau) \Big|_{t_{i-1}}^{t_i} \quad (4.28)$$

$$I_2 = \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{\xi\omega\tau} \sin \omega_D \tau d\tau = \frac{e^{\xi\omega\tau}}{(\xi\omega)^2 + \omega_D^2} (\xi\omega \sin \omega_D \tau + \omega_D \cos \omega_D \tau) \Big|_{t_{i-1}}^{t_i} \quad (4.29)$$

$$I_3 = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \tau e^{\xi\omega\tau} \sin \omega_D \tau d\tau = \left(\tau - \frac{e^{\xi\omega\tau}}{(\xi\omega)^2 + \omega_D^2} \right) I_2 + \frac{\omega_D}{(\xi\omega)^2 + \omega_D^2} I_1 \Big|_{t_{i-1}}^{t_i} \quad (4.30)$$

$$I_3 = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \tau e^{\xi\omega\tau} \cos \omega_D \tau d\tau = \left(\tau - \frac{e^{\xi\omega\tau}}{(\xi\omega)^2 + \omega_D^2} \right) I_1' + \frac{\omega_D}{(\xi\omega)^2 + \omega_D^2} I_2' \Big|_{t_{i-1}}^{t_i} \quad (4.31)$$

Dimana I_1' dan I_2' adalah integral yang dinyatakan pada Persamaan (4.28) dan (4.29) sebelum dievaluasi pada kondisi limit. $A_D(t_i)$ dan $B_D(t_i)$ dalam besaran integral, dapat dievaluasi dari bentuk

$$A_D(t_i) = A_D(t_{i-1}) + \left(F(t_{i-1}) - t_{i-1} \frac{\Delta F_i}{\Delta t_i} \right) I_1 + \frac{\Delta F_i}{\Delta t_i} I_4 \quad (4.32)$$

$$B_D(t_i) = B_D(t_{i-1}) + \left(F(t_{i-1}) - t_{i-1} \frac{\Delta F_i}{\Delta t_i} \right) I_2 + \frac{\Delta F_i}{\Delta t_i} I_3 \quad (4.33)$$

Akhirnya, substitusikan Persamaan. (4.32) dan (4.33) ke dalam Persamaan. (4.25) akan memberikan perpindahan pada saat t_i adalah

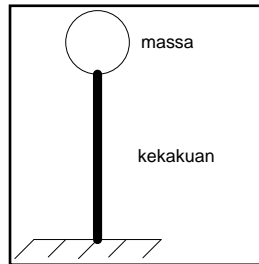
$$u(t_i) = \frac{e^{-\xi\omega t_i}}{m\omega_D} \{ A_D(t_i) \sin \omega_D t_i - B_D(t_i) \cos \omega_D t_i \} \quad (4.34)$$

4.5 Evaluasi Numerik Integral Duhamel Untuk Sistem Teredam dengan Berbagai Variasi Beban

Masalah yang dianalisis adalah struktur derajat kebebasan tunggal dengan variasi massa dan kekakuan baik yang teredam maupun tak teredam pada sistem elastis. Analisis struktur dilakukan dengan berbagai pola pembebanan antara lain beban segitiga, beban segiempat, beban trapesium, beban sinusoidal dan beban gempa.

a. Data struktur

Analisis struktur dilakukan dengan variasi massa dan kekakuan. Secara sederhana model sistem derajat kebebasan tunggal dapat dilihat seperti gambar berikut,



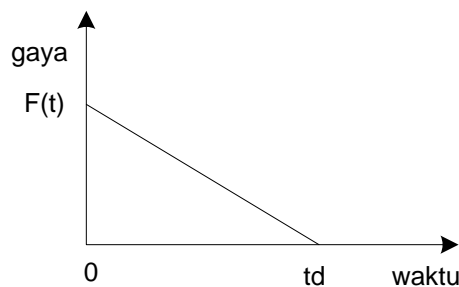
Gambar 4. 3 Idealisasi struktur derajat kebebasan tunggal

b. Data pembebanan

Analisis akan dilakukan untuk setiap pola pembebanan baik untuk sistem tak teredam maupun sistem yang yang diberi redaman. Adapun pembebanan yang dapat diterapkan dalam perhitungan adalah sebagai berikut:

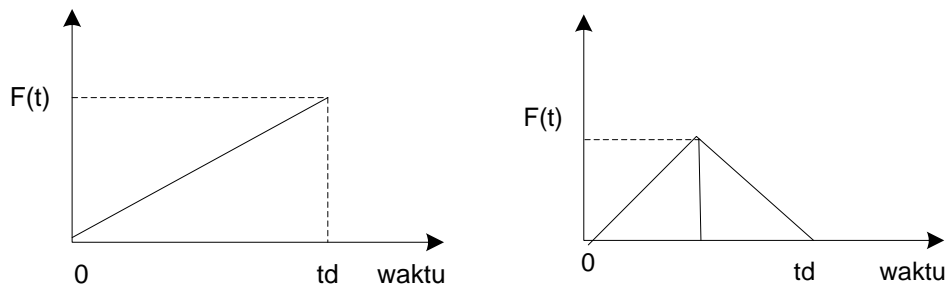
1. Beban segitiga

Beban akibat ledakan pada hakekatnya dapat dimodelkan menjadi beban segitiga. Beban ini terjadi tiba-tiba, kemudian berangsur-angsur menurun sampai titik nol. Proses berkurangnya beban ini dapat dianggap berkurang secara linier mulai dari beban maksimum pada saat $t = 0$ sampai beban sama dengan 0 saat $t = t_d$.



Gambar 4. 4 Beban segitiga

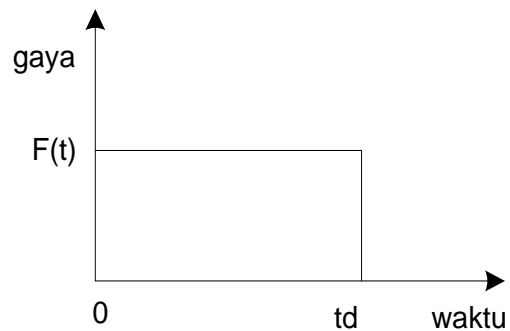
Pembebanan segitiga yang lainnya dapat dilihat seperti gambar berikut,



Gambar 4. 5 Beban segitiga yang lainnya

2. Beban segiempat

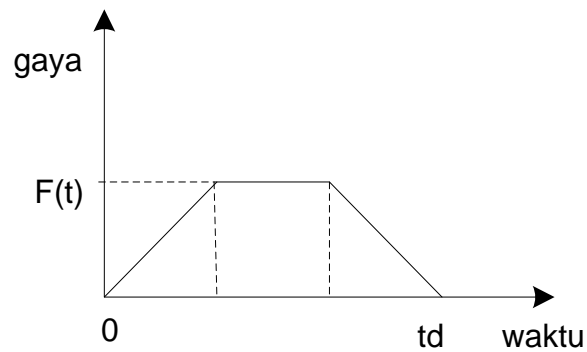
Pada beban segiempat beban tetap selama rentang waktu tertentu, setelah rentang waktu tersebut beban menjadi nol.



Gambar 4. 6 Beban segiempat

3. Beban trapesium

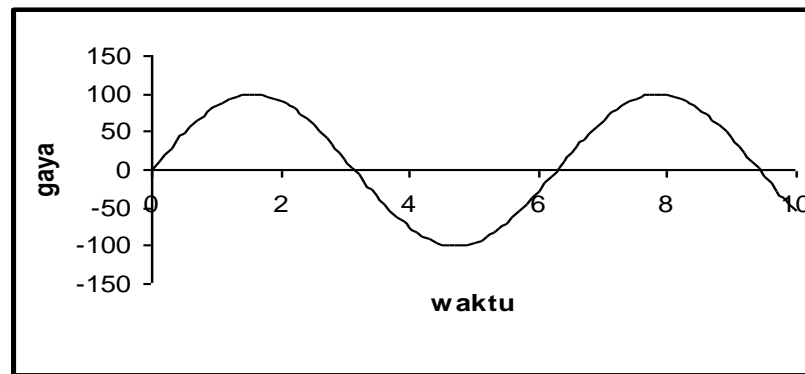
Beban trapesium merupakan gabungan dari beban segitiga dan beban konstan atau beban segi empat. Pada awalnya beban sama dengan nol, kemudian bertambah secara linier dan dikombinasikan dengan beban konstan selang waktu tertentu kemudian berkurang kembali secara linier sampai $t = t_d$ dan gaya kembali nol.



Gambar 4. 7 Beban trapesium

4. Beban Sinusoidal

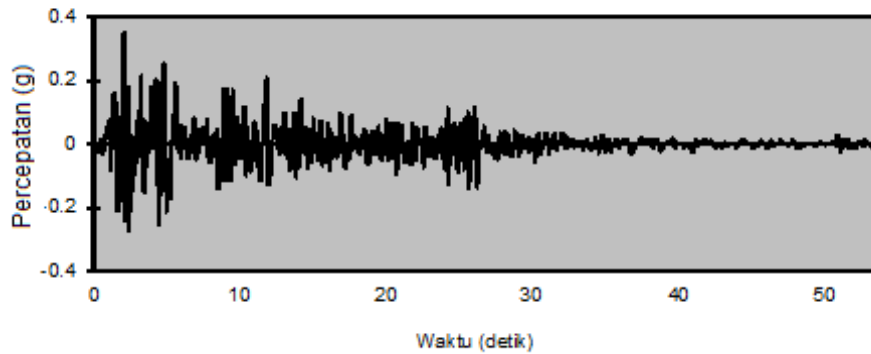
Beban sinusoidal merupakan beban yang bentuk pembebanannya berupa fungsi sinus atau kosinus.



Gambar 4. 8 Beban Sinusoidal

5. Beban Gempa

Beban gempa merupakan beban non periodik dengan gerakan acak (random). Salah satu contoh beban gempa yang banyak digunakan dalam analisis struktur Teknik Sipil adalah data gempa El Centro. Secara visual beban gempa El Centro dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 4. 9 Accelerogram Gempa El Centro

4.6 Contoh Soal dan Penyelesaian

Contoh 4.1.

Tentukan respons dinamis dari sebuah menara akibat beban ledakan.

Penyelesaian:

Jika redaman tak diperhitungkan maka frekuensi naturalnya adalah

$$\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{100000/100} = 31,62 \text{ rad/det}$$

Karena beban diberikan sebagai bagian-bagian fungsi linier maka respons yang didapat dengan menggunakan integral Duhamel Persamaan (4.14), dengan koefisien $A(t)$ dan $B(t)$ yang ditentukan dari Persamaan (4.21) dan (4.22) adalah eksak. Perhitungan yang diperlukan disajikan dalam Tabel 4.1 untuk beberapa waktu. Integral dari Persamaan (4.18) dan (4.19) diberi tanda pengenal $\Delta A(t)$ & $\Delta B(t)$ pada tabel ini,

$$\Delta A(t_i) = A(t_i) - A(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(\tau) \cos \omega t d\tau \quad (4.18)$$

$$\Delta B(t_i) = B(t_i) - B(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(\tau) \sin \omega t d\tau \quad (4.19)$$

Karena ledakan tersebut berhenti pada saat $t = 0,060$ detik maka harga A dan B tetap konstan sesudah saat itu. Akibatnya, getaran bebas yang terjadi selanjutnya, didapatkan dengan mensubstitusikan harga A dan B yang dievaluasi pada $t = 0,060$ detik ke dalam Persamaan (4.14), yaitu,

$$u(t) = (2571 \sin 31,62t - 3585 \cos 31,62t) / 3162 \quad \text{atau}$$

$$u(t) = 0,8130 \sin 31,62t - 1,1338 \cos 31,62t$$

Untuk $t \geq 0,060$ detik

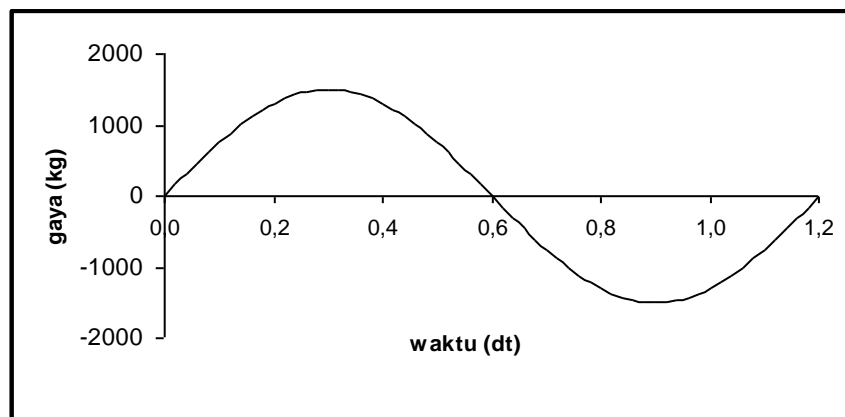
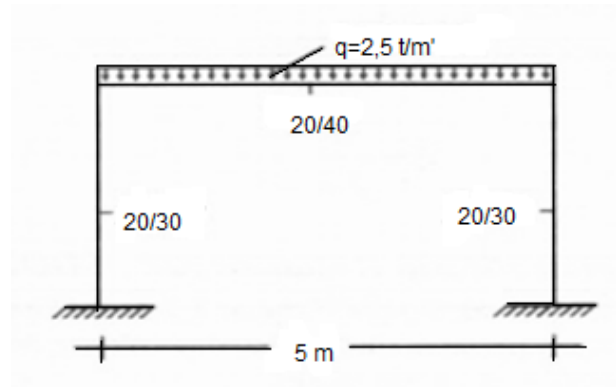
Tabel 4. 1 Perhitungan numerik dari respons untuk Contoh 4.1

t (det)	F(t)	ωt	$\Delta A(t)$	$A(t)$	$\Delta B(t)$	$B(t)$	$u(t)$ (in)
0,000	0	0	0	0	0	0	0
0,020	120,000	0,6324	1082	1082	486	486	0,078
0,040	120,000	1,2649	1376	2458	1918	2404	0,512
0,060	0	1,8974	113	2571	1181	3585	1,134
0,080	0	2,5298	0	2571	0	3585	1,395
0,100	0	3,1623	0	2571	0	3585	1,117

Contoh 4.2.

Suatu sistem derajat kebebasan tunggal mempunyai dimensi dan pembebanan seperti pada gambar di bawah ini. Diketahui modulus elastik beton $E_b =$

$2,2 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$ dan percepatan gravitasi $g = 980 \text{ cm/dt}^2$. Sistem dibebani dengan beban dinamik fungsi sinus sebesar $P(t) = 1500 \sin (\pi t/0,6)$ selama 1,2 detik. Berdasarkan data-data tersebut maka diperoleh massa sistem = $12,775 \text{ kgdt}^2/\text{cm}$ dan kekakuan = $4027,2714 \text{ kg/cm}$.



Hasil perhitungan dengan menggunakan Integral Duhamel dapat dilihat pada Tabel 4.2.

Tabel 4. 2 Hasil hitungan perpindahan dengan Integral Duhamel

No	Waktu (dt)	Gaya (kg)	Perpindahan (cm)
1	0,00	0,0000	0,00000
2	0,02	156,793	0,00081
3	0,04	311,868	0,00637
4	0,06	463,525	0,02078
5	0,08	610,105	0,04694
6	0,10	750,000	0,08610
7	0,12	881,678	0,13772
8	0,14	1003,696	0,19942
9	0,16	1114,717	0,26727
10	0,18	1213,525	0,33625
11	0,20	1299,038	0,40081
12	0,22	1370,318	0,45553
13	0,24	1426,585	0,49578
14	0,26	1467,221	0,51829
15	0,28	1491,783	0,52151
16	0,30	1500,000	0,50579
17	0,32	1491,783	0,47335
18	0,34	1467,221	0,42798
19	0,36	1426,585	0,37458
20	0,38	1370,318	0,31856
21	0,40	1299,038	0,26517
22	0,42	1213,525	0,21887

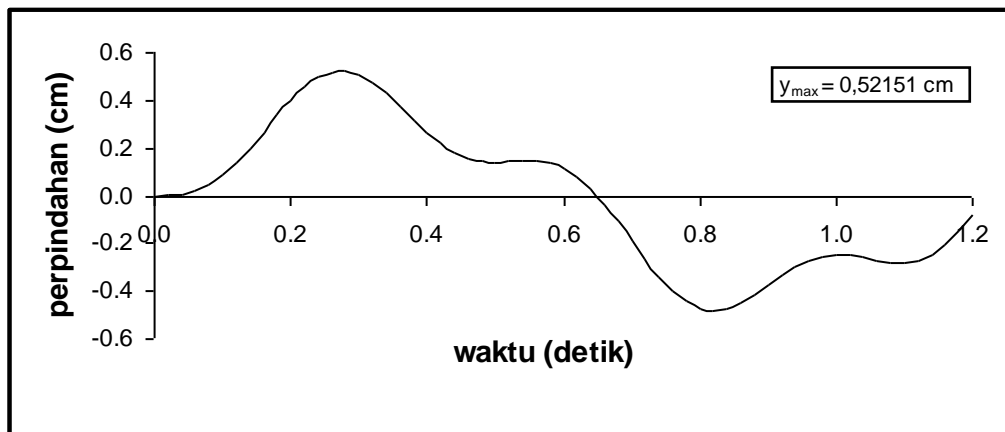
Tabel 4.2. Lanjutan

No	Waktu (dt)	Gaya (kg)	Perpindahan (cm)
23	0,44	1114,717	0,18279
24	0,46	1003,696	0,15838
25	0,48	881,678	0,14524
26	0,50	750,000	0,14125
27	0,52	610,105	0,14283
28	0,54	463,525	0,14545
29	0,56	311,868	0,14426
30	0,58	156,793	0,13472
31	0,60	0,0000	0,11321
32	0,62	-156,793	0,07758
33	0,64	-311,868	0,02745
34	0,66	-463,525	-0,03574
35	0,68	-610,105	-0,10878
36	0,70	-750,000	-0,18711
37	0,72	-881,678	-0,26529
38	0,74	-1003,696	-0,33761
39	0,76	-1114,717	-0,39883
40	0,78	-1213,525	-0,44473
41	0,80	-1299,038	-0,47266
42	0,82	-1370,318	-0,48178
43	0,84	-1426,585	-0,47315
44	0,86	-1467,221	-0,44959
45	0,88	-1491,783	-0,41529
46	0,90	-1500,000	-0,37530
47	0,92	-1491,783	-0,33485

Tabel 4.2. Lanjutan

No	Waktu (dt)	Gaya (kg)	Perpindahan (cm)
48	0,94	-1467,221	-0,29874
49	0,96	-1426,585	-0,27072
50	0,98	-1370,318	-0,25303
51	1,00	-1299,038	-0,24613
52	1,02	-1213,525	-0,24869
53	1,04	-1114,717	-0,25773
54	1,06	-1003,696	-0,26907
55	1,08	-881,678	-0,27785
56	1,10	-750,000	-0,27921
57	1,12	-610,105	-0,2689
58	1,14	-463,525	-0,24389
59	1,16	-311,868	-0,20277
60	1,18	-156,793	-0,14597
61	1,20	0,00000	-0,07578

Secara visual hasil hitungan dengan Integral Duhamel dapat dilihat pada gambar berikut:



Contoh 4.3

Untuk membuktikan kebenaran hasil perhitungan program dengan Integral Duhamel, maka diperlukan perhitungan secara manual sebagai validasi hasil perhitungan. Nilai yang ditinjau dari hasil perhitungan adalah nilai perpindahan saja karena di anggap sudah mewakili.

Contoh perhitungan secara manual menggunakan persamaan berikut:

$$y(t) = \left(\frac{P_0}{k} \right) \left(\frac{1}{1-r^2} \right) \{ \sin(\Omega t) - r \sin(\omega t) \}$$

Penyelesaian:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4027,2714}{12,775}} = 17,755177 \text{ rad / det}$$

$$\Omega = \frac{\pi}{0,6} = 5,238095$$

$$r = \frac{\Omega}{\omega} = \frac{5,238095}{17,755177} = 0,2950179$$

$$\frac{P_0}{k} = \frac{1500}{4027,2714} = 0,3724606$$

$$\frac{1}{(1-r^2)} = \frac{1}{(1-(0,2950179)^2)} = 1,0953329$$

$$y(t) = \left(\frac{P_0}{k} \right) \left(\frac{1}{1-r^2} \right) \{ \sin(\Omega t) - r \sin(\omega t) \}$$

t = 0 detik,

maka

$$y(t) = 0,37246 \times 1,09533 \times (\sin(5,23809 \times 0) - 0,29501 \times \sin(17,75517 \times 0))$$

$$= 0 \text{ cm}$$

t = 0,02 detik, maka

$$y(t) = 0,37246 \times 1,09533 \times (\sin(5,23809 \times 0,02) - 0,29501 \times \sin(17,75517 \times 0,02))$$

$$= 0,000814 \text{ cm}$$

Hasil hitungan untuk data berikutnya dapat dilihat pada Tabel 4.3.

Tabel 4. 3 Hasil hitungan perpindahan secara manual

No	Waktu (dt)	Gaya (kg)	sin (Ω t)	r sin (ωt)	Perpindahan (cm)
1	0,00	0,0000	0,00000	0,00000	0,00000
2	0,02	156,793	0,10457	0,10257	0,00081
3	0,04	311,868	0,20799	0,19235	0,00638
4	0,06	463,525	0,30914	0,25812	0,02081
5	0,08	610,105	0,40689	0,29169	0,04700
6	0,10	750,000	0,50018	0,28886	0,08621
7	0,12	881,678	0,58799	0,24998	0,13790
8	0,14	1003,696	0,66935	0,17992	0,19967
9	0,16	1114,717	0,74337	0,08740	0,26762

Tabel 4.3. Lanjutan

No	Waktu (dt)	Gaya (kg)	sin (Ωt)	r sin (ωt)	Perpindahan (cm)
10	0,18	1213,525	0,80924	-0,01602	0,33668
11	0,20	1299,038	0,86624	-0,11745	0,40131
12	0,22	1370,318	0,91373	-0,20421	0,45609
13	0,24	1426,585	0,95121	-0,26550	0,49638
14	0,26	1467,221	0,97826	-0,29366	0,51890
15	0,28	1491,783	0,99458	-0,28517	0,52210
16	0,30	1500,000	1,00000	-0,24111	0,50633
17	0,32	1491,783	0,99445	-0,16695	0,47382
18	0,34	1467,221	0,97800	-0,07197	0,42835
19	0,36	1426,585	0,95082	0,03200	0,37485
20	0,38	1370,318	0,91322	0,13197	0,31872
21	0,40	1299,038	0,86560	0,21548	0,26523
22	0,42	1213,525	0,80850	0,27209	0,21884
23	0,44	1114,717	0,74252	0,29476	0,18267
24	0,46	1003,696	0,66841	0,28065	0,15819

Tabel 4.3. Lanjutan

No	Waktu (dt)	Gaya (kg)	sin (Ωt)	r sin (ωt)	Perpindahan (cm)
25	0,48	881,678	0,58697	0,23152	0,14501
26	0,50	750,000	0,49909	0,15349	0,14099
27	0,52	610,105	0,40574	0,05632	0,14255
28	0,54	463,525	0,30793	-0,04788	0,14516
29	0,56	311,868	0,20676	-0,14611	0,14396
30	0,58	156,793	0,10331	-0,22610	0,13439
31	0,60	0,0000	-0,00126	-0,27789	0,11285
32	0,62	-156,793	-0,10583	-0,29499	0,07717
33	0,64	-311,868	-0,20923	-0,27529	0,02695
34	0,66	-463,525	-0,31034	-0,22124	-0,03635
35	0,68	-610,105	-0,40805	-0,13958	-0,10952
36	0,70	-750,000	-0,50128	-0,04051	-0,18798
37	0,72	-881,678	-0,58901	0,06362	-0,26625
38	0,74	-1003,696	-0,67029	0,15981	-0,33866
39	0,76	-1114,717	-0,74422	0,23606	-0,39992
40	0,78	-1213,525	-0,80998	0,28286	-0,44584

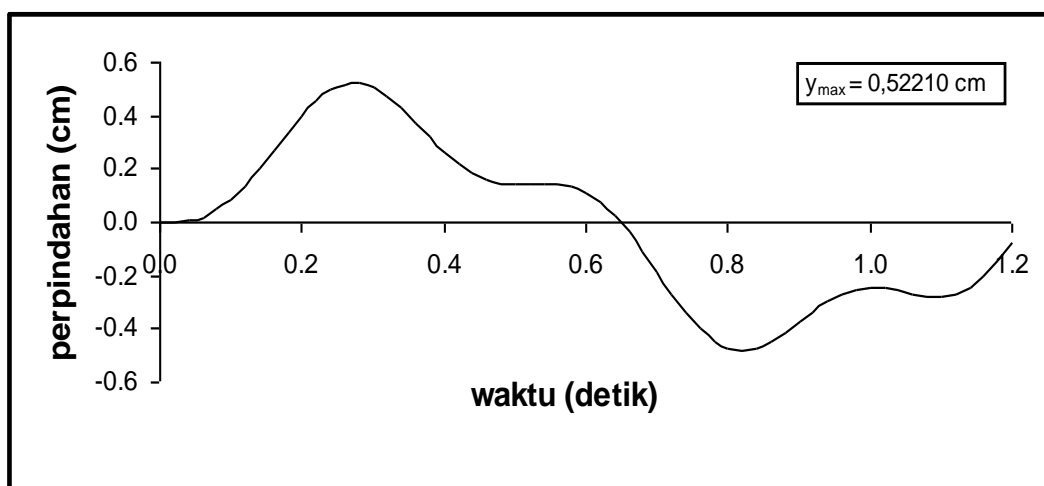
Tabel 4.3. Lanjutan

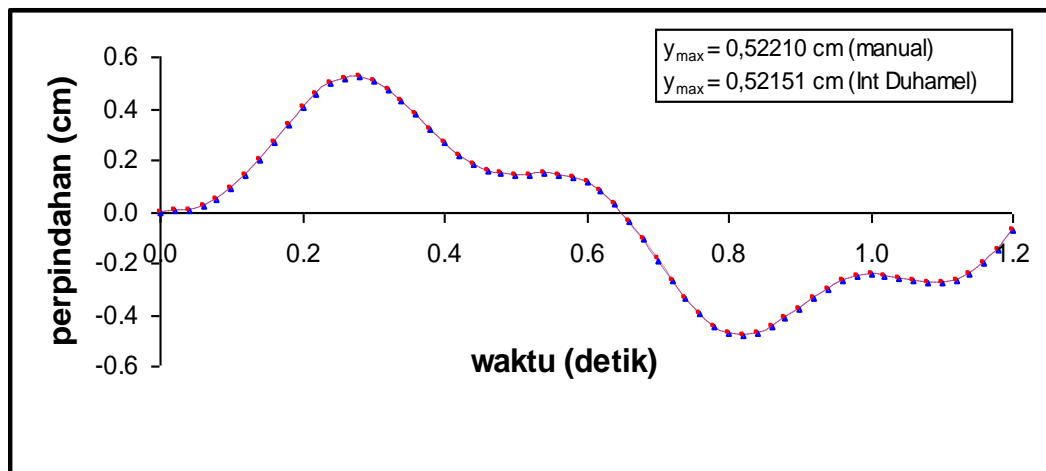
No	Waktu (dt)	Gaya (kg)	sin (Ωt)	r sin (ωt)	Perpindahan (cm)
41	0,80	-1299,038	-0,86687	0,29436	-0,47374
42	0,82	-1370,318	-0,91425	0,26913	-0,48278
43	0,84	-1426,585	-0,95160	0,21032	-0,47403
44	0,86	-1467,221	-0,97852	0,12526	-0,45031
45	0,88	-1491,783	-0,99471	0,02458	-0,41584
46	0,90	-1500,000	-1,00000	-0,07917	-0,37567
47	0,92	-1491,783	-0,99432	-0,17304	-0,33505
48	0,94	-1467,221	-0,97773	-0,24532	-0,29880
49	0,96	-1426,585	-0,95043	-0,28699	-0,27066
50	0,98	-1370,318	-0,91270	-0,29285	-0,25288
51	1,00	-1299,038	-0,86497	-0,26217	-0,24593
52	1,02	-1213,525	-0,80775	-0,19877	-0,24845
53	1,04	-1114,717	-0,74168	-0,11057	-0,25747
54	1,06	-1003,696	-0,66747	-0,00857	-0,26881
55	1,08	-881,678	-0,58594	0,09449	-0,27760
56	1,10	-750,000	-0,49799	0,18577	-0,27895

Tabel 4.3. Lanjutan

No	Waktu (dt)	Gaya (kg)	$\sin(\Omega t)$	$r \sin(\omega t)$	Perpindahan (cm)
57	1,12	-610,105	-0,40458	0,25386	-0,26862
58	1,14	-463,525	-0,30673	0,29028	-0,24356
59	1,16	-311,868	-0,20552	0,29048	-0,20235
60	1,18	-156,793	-0,10206	0,25443	-0,14544
61	1,20	0,00000	0,00253	0,18664	-0,07511

Secara visual hasil hitungan secara manual dan untuk melihat selisih hitungan secara visual antara hitungan manual dan Integral Duhamel dapat dilihat pada gambar berikut ini:





Selain divalidasi secara manual, program ini juga dibandingkan dengan hasil SAP 2000. Perhitungan ini juga membandingkan nilai perpindahannya saja.

Dengan menggunakan data yang sama diperoleh hasil keluaran dari hitungan SAP 2000 seperti Tabel 4.4 berikut.

Tabel 4. 4 Hasil hitungan perpindahan dengan SAP 2000

No	Waktu (dt)	Gaya (kg)	Perpindahan (cm)
1	0,00	0,0000	0,00000
2	0,02	156,793	0,00081
3	0,04	311,868	0,00637
4	0,06	463,525	0,02078
5	0,08	610,105	0,04694

Tabel 4.4. Lanjutan

No	Waktu (dt)	Gaya (kg)	Perpindahan (cm)
6	0,10	750,000	0,08610
7	0,12	881,678	0,13772
8	0,14	1003,696	0,19942
9	0,16	1114,717	0,26727
10	0,18	1213,525	0,33625
11	0,20	1299,038	0,40081
12	0,22	1370,318	0,45553
13	0,24	1426,585	0,49578
14	0,26	1467,221	0,51829
15	0,28	1491,783	0,52151
16	0,30	1500,000	0,50579
17	0,32	1491,783	0,47335
18	0,34	1467,221	0,42798
19	0,36	1426,585	0,37458
20	0,38	1370,318	0,31856
21	0,40	1299,038	0,26517

Tabel 4.4. Lanjutan

No	Waktu (dt)	Gaya (kg)	Perpindahan (cm)
22	0,42	1213,525	0,21887
23	0,44	1114,717	0,18279
24	0,46	1003,696	0,15838
25	0,48	881,678	0,14524
26	0,50	750,000	0,14125
27	0,52	610,105	0,14283
28	0,54	463,525	0,14545
29	0,56	311,868	0,14426
30	0,58	156,793	0,13472
31	0,60	0,0000	0,11321
32	0,62	-156,793	0,07758
33	0,64	-311,868	0,02742
34	0,66	-463,525	-0,03581
35	0,68	-610,105	-0,10890
36	0,70	-750,000	-0,18720
37	0,72	-881,678	-0,26548

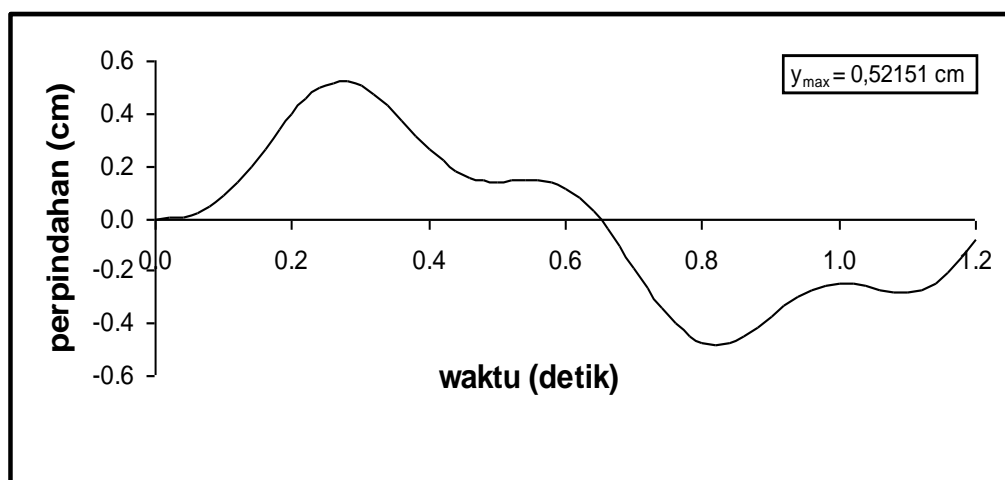
Tabel 4.4. Lanjutan

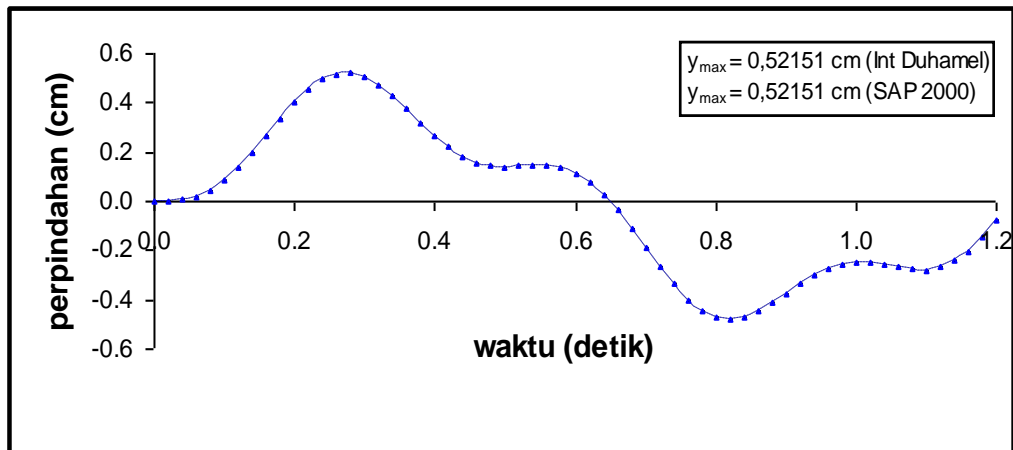
No	Waktu (dt)	Gaya (kg)	Perpindahan (cm)
38	0,74	-1003,696	-0,33782
39	0,76	-1114,717	-0,39905
40	0,78	-1213,525	-0,44496
41	0,80	-1299,038	-0,47288
42	0,82	-1370,318	-0,48197
43	0,84	-1426,585	-0,4733
44	0,86	-1467,221	-0,44969
45	0,88	-1491,783	-0,41535
46	0,90	-1500,000	-0,37531
47	0,92	-1491,783	-0,33483
48	0,94	-1467,221	-0,29871
49	0,96	-1426,585	-0,27069
50	0,98	-1370,318	-0,25302
51	1,00	-1299,038	-0,24615
52	1,02	-1213,525	-0,24875
53	1,04	-1114,717	-0,25783

Tabel 4.4. Lanjutan

No	Waktu (dt)	Gaya (kg)	Perpindahan (cm)
54	1,06	-1003,696	-0,26922
55	1,08	-881,678	-0,27806
56	1,10	-750,000	-0,27946
57	1,12	-610,105	-0,2692
58	1,14	-463,525	-0,24421
59	1,16	-311,868	-0,20308
60	1,18	-156,793	-0,14626
61	1,20	0,00000	-0,07604

Secara visual hasil hitungan dengan SAP 2000 dapat dilihat pada Gambar 4.16.





Hasil perhitungan perpindahan dari ketiga cara tersebut dan nilai kesalahan program dibandingkan dengan hitungan manual dan SAP 2000 dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 4. 5 Perhitungan perpindahan manual, Integral Duhamel dan SAP2000

No	Waktu (dt)	Gaya (kg)	Perpindahan Manual	Perpindahan Duhamel	Perpindahan SAP 2000	Error 1	Error 2
1	0,00	0,0000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
2	0,02	156,793	0,00081	0,00081	0,00081	0,00000	0,00000
3	0,04	311,868	0,00638	0,00637	0,00637	0,00001	0,00000
4	0,06	463,525	0,02081	0,02078	0,02078	0,00003	0,00000
5	0,08	610,105	0,04700	0,04694	0,04694	0,00006	0,00000
6	0,10	750,000	0,08621	0,08610	0,08610	0,00011	0,00000
7	0,12	881,678	0,13790	0,13772	0,13772	0,00018	0,00000
8	0,14	1003,696	0,19967	0,19942	0,19942	0,00025	0,00000
9	0,16	1114,717	0,26762	0,26727	0,26727	0,00035	0,00000
10	0,18	1213,525	0,33668	0,33625	0,33625	0,00043	0,00000
11	0,20	1299,038	0,40131	0,40081	0,40081	0,00050	0,00000
12	0,22	1370,318	0,45609	0,45553	0,45553	0,00056	0,00000
13	0,24	1426,585	0,49638	0,49578	0,49578	0,00060	0,00000
14	0,26	1467,221	0,51890	0,51829	0,51829	0,00061	0,00000
15	0,28	1491,783	0,52210	0,52151	0,52151	0,00059	0,00000
16	0,30	1500,000	0,50633	0,50579	0,50579	0,00054	0,00000
17	0,32	1491,783	0,47382	0,47335	0,47335	0,00047	0,00000
18	0,34	1467,221	0,42835	0,42798	0,42798	0,00037	0,00000
19	0,36	1426,585	0,37485	0,37458	0,37458	0,00027	0,00000
20	0,38	1370,318	0,31872	0,31856	0,31856	0,00016	0,00000
21	0,40	1299,038	0,26523	0,26517	0,26517	0,00006	0,00000
22	0,42	1213,525	0,21884	0,21887	0,21887	0,00003	0,00000
23	0,44	1114,717	0,18267	0,18279	0,18279	0,00012	0,00000
24	0,46	1003,696	0,15819	0,15838	0,15838	0,00019	0,00000
25	0,48	881,678	0,14501	0,14524	0,14524	0,00023	0,00000
26	0,50	750,000	0,14099	0,14125	0,14125	0,00026	0,00000
27	0,52	610,105	0,14255	0,14283	0,14283	0,00028	0,00000
28	0,54	463,525	0,14516	0,14545	0,14545	0,00029	0,00000
29	0,56	311,868	0,14396	0,14426	0,14426	0,00030	0,00000
30	0,58	156,793	0,13439	0,13472	0,13472	0,00033	0,00000
31	0,60	0,0000	0,11285	0,11321	0,11321	0,00036	0,00000
32	0,62	-156,793	0,07717	0,07758	0,07758	0,00041	0,00000
33	0,64	-311,868	0,02695	0,02745	0,02742	0,00050	0,00003
34	0,66	-463,525	-0,03635	-0,03574	-0,03581	0,00061	0,00007
35	0,68	-610,105	-0,10952	-0,10878	-0,10890	0,00074	0,00012
36	0,70	-750,000	-0,18798	-0,18711	-0,18720	0,00087	0,00009
37	0,72	-881,678	-0,26625	-0,26529	-0,26548	0,00096	0,00019
38	0,74	-1003,696	-0,33866	-0,33761	-0,33782	0,00105	0,00021
39	0,76	-1114,717	-0,39992	-0,39883	-0,39905	0,00109	0,00022
40	0,78	-1213,525	-0,44584	-0,44473	-0,44496	0,00111	0,00023
41	0,80	-1299,038	-0,47374	-0,47266	-0,47288	0,00108	0,00022
42	0,82	-1370,318	-0,48278	-0,48178	-0,48197	0,00100	0,00019
43	0,84	-1426,585	-0,47403	-0,47315	-0,4733	0,00088	0,00015
44	0,86	-1467,221	-0,45031	-0,44959	-0,44969	0,00072	0,00010
45	0,88	-1491,783	-0,41584	-0,41529	-0,41535	0,00055	0,00006

Tabel 4.5 Lanjutan

No	Waktu (dt)	Gaya (kg)	Perpindahan Manual	Perpindahan Duhamel	Perpindahan SAP 2000	Error 1	Error 2
46	0,90	-1500,000	-0,37567	-0,37530	-0,37531	0,00037	0,00001
47	0,92	-1491,783	-0,33505	-0,33485	-0,33483	0,00020	0,00002
48	0,94	-1467,221	-0,29880	-0,29874	-0,29871	0,00006	0,00003
49	0,96	-1426,585	-0,27066	-0,27072	-0,27069	0,00006	0,00003
50	0,98	-1370,318	-0,25288	-0,25303	-0,25302	0,00015	0,00001
51	1,00	-1299,038	-0,24593	-0,24613	-0,24615	0,00020	0,00002
52	1,02	-1213,525	-0,24845	-0,24869	-0,24875	0,00024	0,00006
53	1,04	-1114,717	-0,25747	-0,25773	-0,25783	0,00026	0,00010
54	1,06	-1003,696	-0,26881	-0,26907	-0,26922	0,00026	0,00015
55	1,08	-881,678	-0,27760	-0,27785	-0,27806	0,00025	0,00021
56	1,10	-750,000	-0,27895	-0,27921	-0,27946	0,00026	0,00025
57	1,12	-610,105	-0,26862	-0,2689	-0,2692	0,00028	0,00030
58	1,14	-463,525	-0,24356	-0,24389	-0,24421	0,00033	0,00032
59	1,16	-311,868	-0,20235	-0,20277	-0,20308	0,00042	0,00031
60	1,18	-156,793	-0,14544	-0,14597	-0,14626	0,00053	0,00029
61	1,20	0,00000	-0,07511	-0,07578	-0,07604	0,00067	0,00026

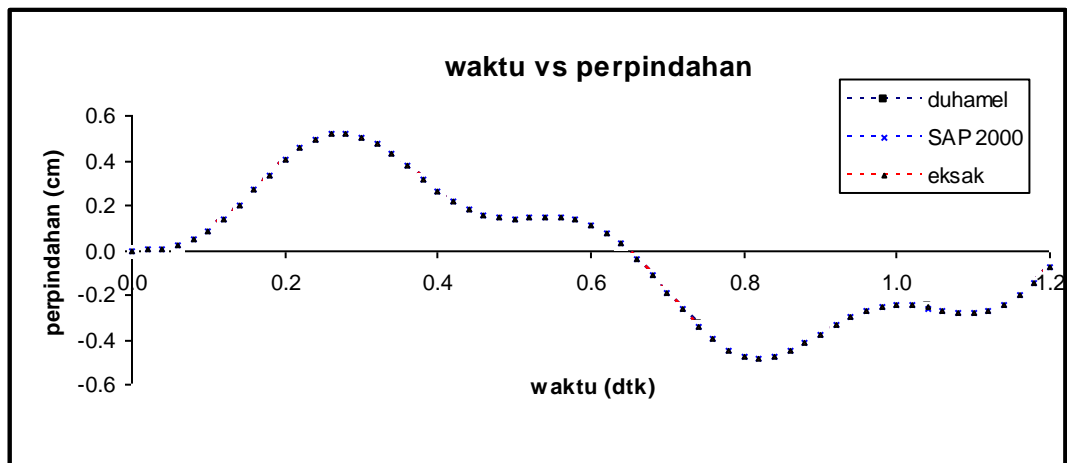
Keterangan:

$$\text{Error 1} = |\text{Perpindahan manual} - \text{perpindahan Integral Duhamel}|$$

$$\text{Error 2} = |\text{Perpindahan SAP2000} - \text{perpindahan Integral Duhamel}|$$

Hasil hitungan memperlihatkan bahwa nilai kesalahan program terhadap hitungan manual dan program sudah relatif kecil. Hasil hitungan program lebih mendekati hasil hitungan dengan SAP 2000 dibandingkan dengan hasil hitungan manual. Hal ini disebabkan pada program dan SAP 2000 adanya pembulatan-pembulatan hitungan karena keterbatasan kemampuan alat komputasi dalam melakukan hitungan.

Secara visual hasil dari perhitungan manual, Integral Duhamel, dan SAP 2000 dapat dilihat pada gambar berikut.



Contoh 4.4.

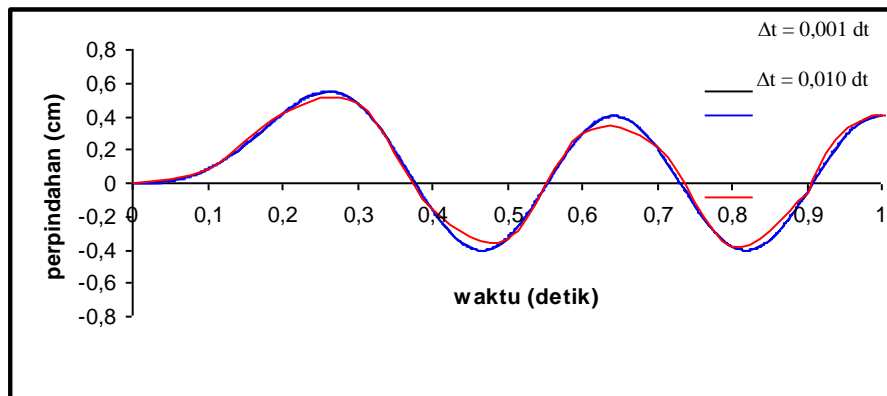
Hitunglah Integral Duhamel dengan Berbagai Tipe Pembebanan.

Penyelesaian:

Analisis sistem dilakukan dengan variasi massa dan kekakuan baik untuk sistem teredam maupun tak teredam dengan tipe pembebanan yang berbeda-beda.

Untuk menentukan nilai selang waktu (Δt) yang digunakan, maka sebelumnya akan dihitung dengan variasi Δt yaitu 0,001 ; 0,01 dan 0,1 detik. Selanjutnya akan digunakan nilai Δt yang memungkinkan untuk memperoleh hasil hitungan dengan nilai error terkecil. Data sistem yang akan dihitung yaitu massa = 12,775 kgdt²/cm, kekakuan = 4027,2714 kg/cm untuk sistem tak teredam. Sedangkan fungsi bebannya yaitu pola pembebanan segitiga.

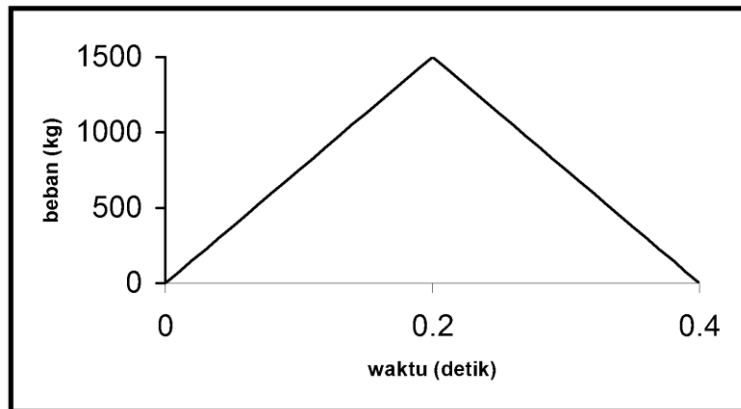
Secara visual hasil hitungan perpindahan dengan variasi Δt dapat dilihat pada gambar berikut.



Berdasarkan gambar di atas diperoleh hasil yang berbeda untuk masing-masing Δt . Semakin kecil Δt maka diperoleh hasil yang semakin mendekati nilai error terkecil. Untuk $\Delta t = 0,001$ detik diperoleh nilai $y_{\max} = 0,54874$ cm, $\Delta t = 0,01$ detik diperoleh nilai $y_{\max} = 0,54867$ cm dan untuk $\Delta t = 0,1$ detik diperoleh nilai $y_{\max} = 0,47735$ cm. Nilai y_{\max} untuk $\Delta t = 0,001$ detik dan $\Delta t = 0,01$ detik hampir sama dan lebih besar dari nilai y_{\max} untuk $\Delta t = 0,1$ detik. Dari hasil yang diperoleh maka untuk hitungan berikutnya digunakan $\Delta t = 0,01$ detik dengan pertimbangan keluarannya lebih sedikit dibanding $\Delta t = 0,001$ sementara hasilnya hampir sama, sehingga pengerjaannya menjadi lebih sederhana.

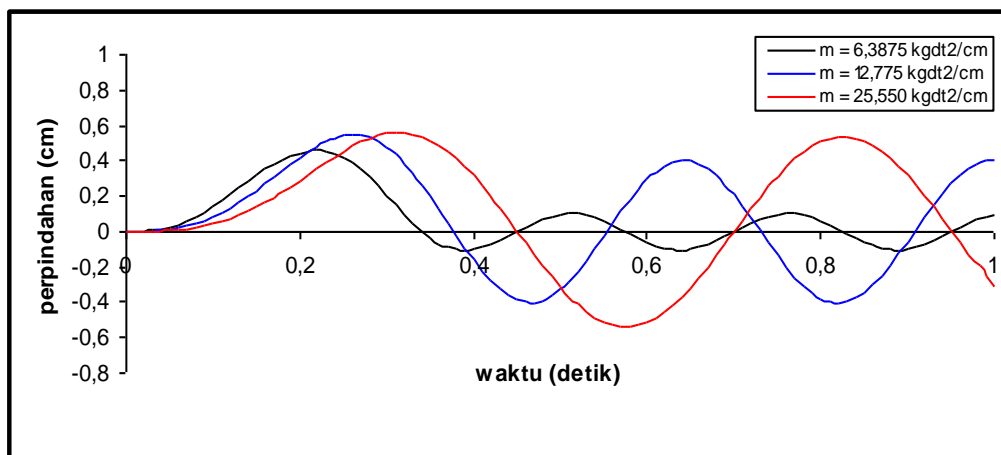
1. Beban segitiga

Gambar berikut merupakan beban segitiga yang akan dihitung respon maksimumnya baik untuk sistem teredam maupun tak teredam.



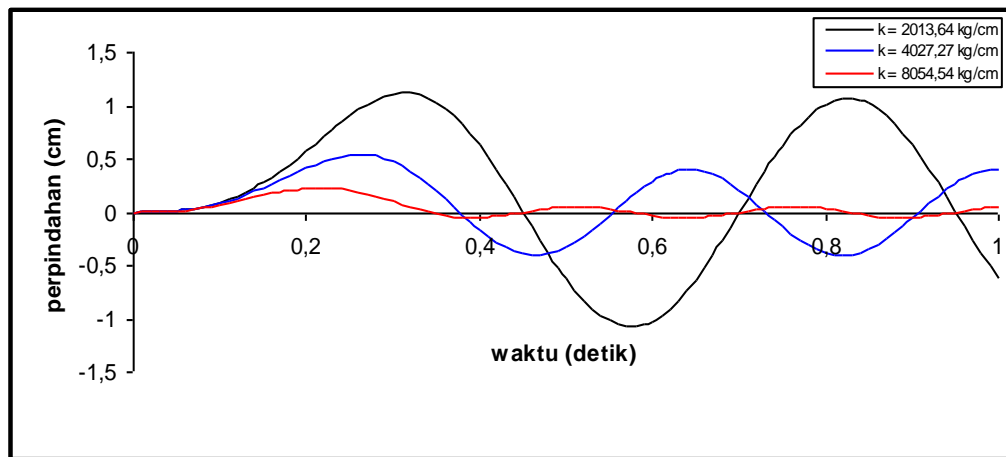
Variasi massa dengan kekakuan tetap pada sistem tak teredam

Berikut merupakan grafik hasil hitungan perpindahan akibat beban segitiga dengan kekakuan tetap = 4027,27 kg/cm dan massa bervariasi. Waktu vs perpindahan dengan variasi massa akibat beban segitiga pada sistem tak teredam dapat dilihat pada gambar berikut:



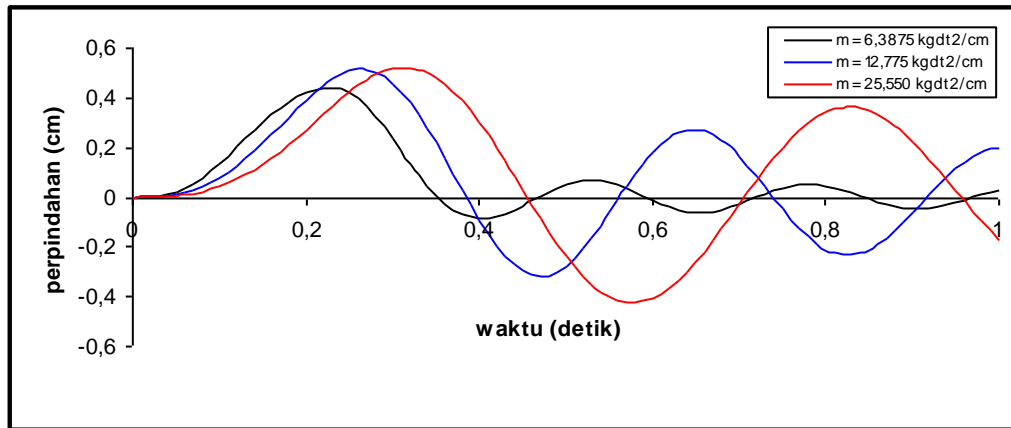
Variasi kekakuan dengan massa tetap pada sistem tak teredam

Berikut merupakan grafik hasil hitungan perpindahan akibat beban segitiga dengan massa tetap = $12,776 \text{ kgdt}^2/\text{cm}$ dan kekakuan bervariasi. Waktu vs perpindahan dengan variasi kekakuan akibat beban segitiga pada sistem tak teredam dapat dilihat pada gambar berikut ini:



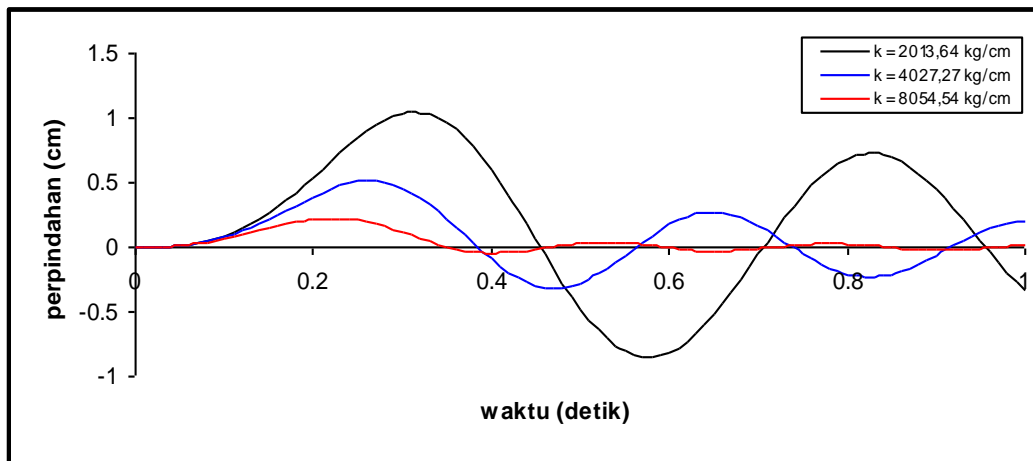
Variasi massa dengan kekakuan tetap pada sistem teredam

Berikut merupakan grafik hasil hitungan perpindahan akibat beban segitiga dengan kekakuan tetap = $4027,27 \text{ kg/cm}$ dan massa bervariasi yang diberi redaman sebesar 5%. Waktu vs perpindahan dengan variasi massa akibat beban segitiga pada sistem teredam 5% dapat dilihat pada gambar berikut ini:



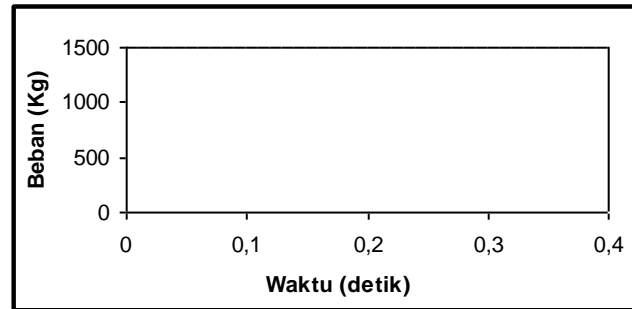
Variasi kekakuan dengan massa tetap pada sistem teredam

Berikut merupakan grafik hasil hitungan perpindahan akibat beban segitiga dengan massa tetap = $12,776 \text{ kgdt}^2/\text{cm}$ dan kekakuan bervariasi dengan redaman sebesar 5%. Waktu vs perpindahan dengan variasi kekakuan akibat beban segitiga pada sistem teredam 5% dapat dilihat pada gambar berikut ini:



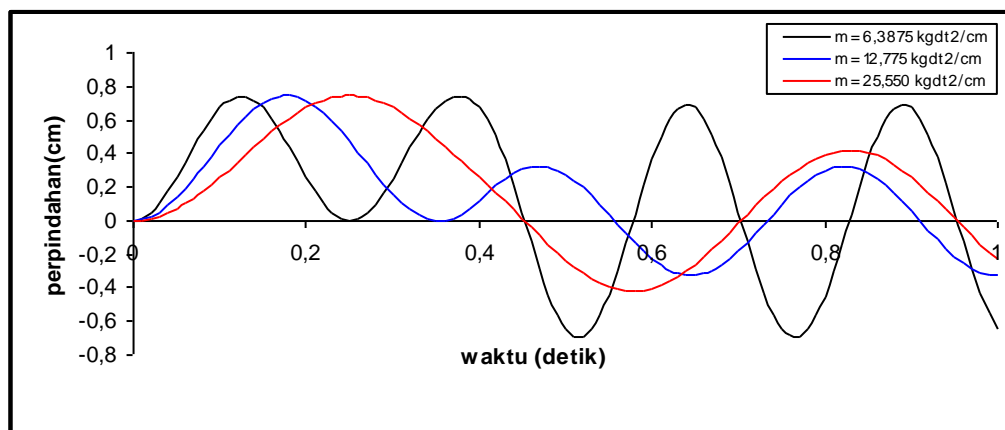
2. Beban segiempat

Dengan variasi yang sama akan dihitung respon akibat beban segi empat seperti gambar berikut.



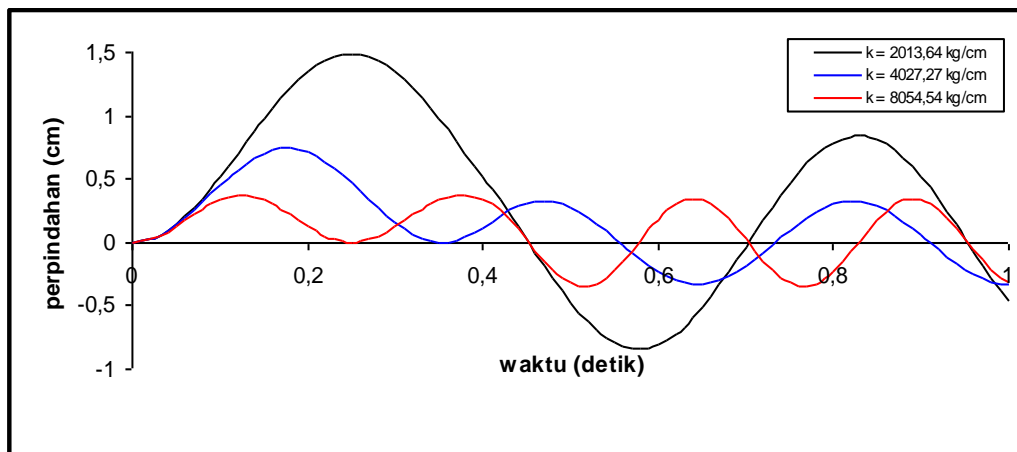
Variasi massa dengan kekakuan tetap pada sistem tak teredam

Berikut merupakan grafik hasil hitungan perpindahan akibat beban segiempat dengan kekakuan tetap = 4027,27 kg/cm dan massa bervariasi. Waktu vs perpindahan dengan variasi massa akibat beban segiempat pada sistem tak teredam dapat dilihat pada gambar berikut ini:



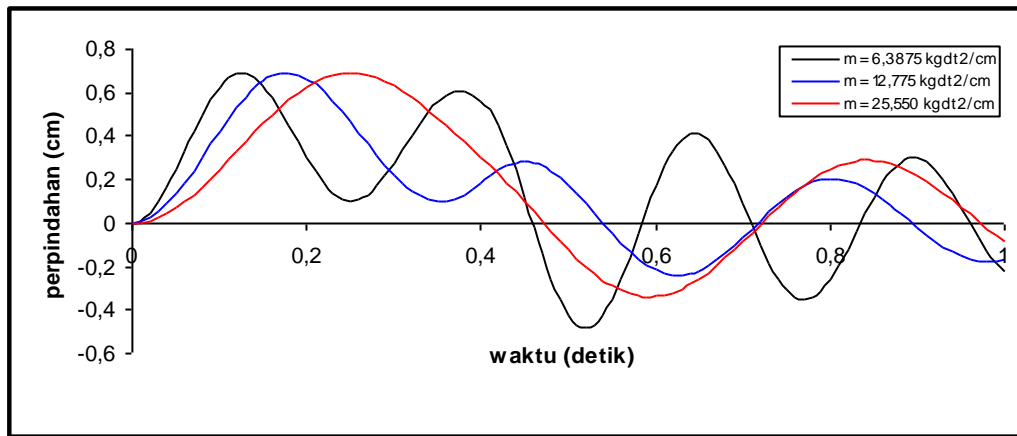
Variasi kekakuan dengan massa tetap pada sistem tak teredam

Berikut merupakan grafik hasil hitungan perpindahan akibat beban segiempat dengan massa tetap = $12,776 \text{ kgdt}^2/\text{cm}$ dan kekakuan bervariasi. Waktu vs perpindahan dengan variasi kekakuan akibat beban segiempat pada sistem tak teredam dapat dilihat pada gambar di bawah ini.



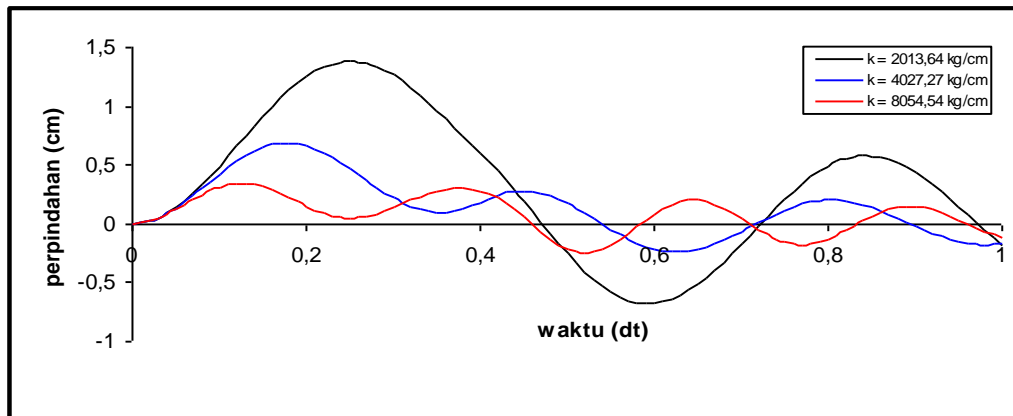
Variasi massa dengan kekakuan tetap pada sistem teredam

Berikut merupakan grafik hasil hitungan perpindahan akibat beban segiempat dengan kekakuan tetap = $4027,27 \text{ kg/cm}$ dan massa bervariasi yang diberi redaman sebesar 5%. Waktu vs perpindahan dengan variasi massa akibat beban segiempat pada sistem teredam 5% dapat dilihat pada gambar berikut.



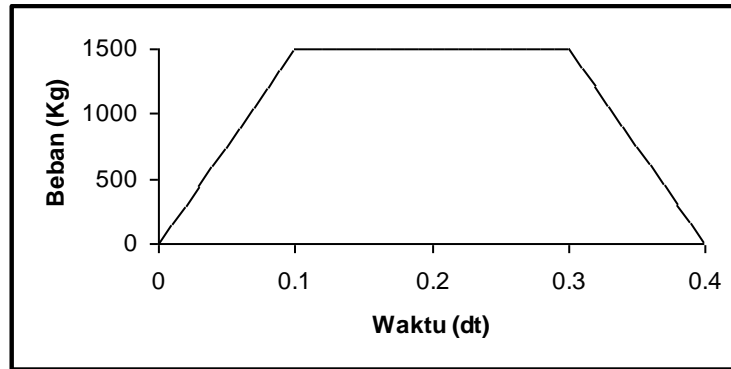
Variasi kekakuan dengan massa tetap pada sistem teredam

Berikut merupakan grafik hasil hitungan perpindahan akibat beban segiempat dengan massa tetap = $12,776 \text{ kgdt}^2/\text{cm}$ dan kekakuan bervariasi dengan redaman sebesar 5%. Waktu vs perpindahan dengan variasi kekakuan akibat beban segiempat pada sistem teredam 5% dapat dilihat pada gambar berikut ini.



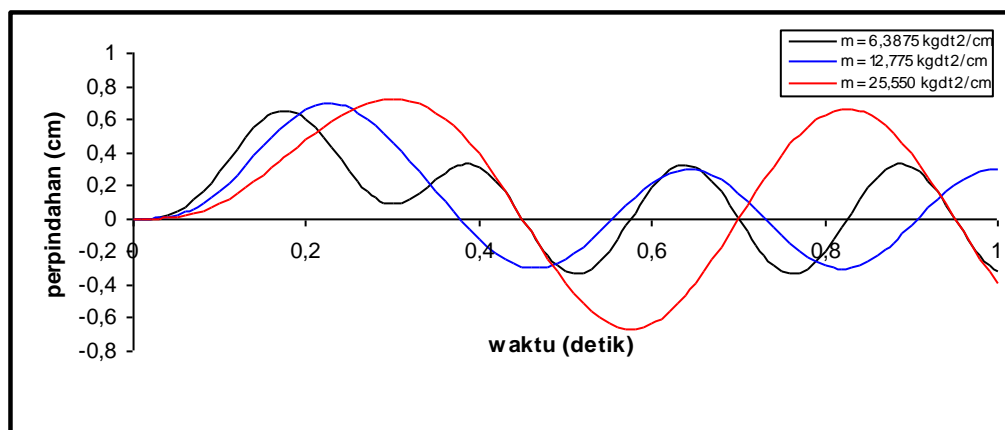
3. Beban trapesium

Berikut dihitung respon akibat fungsi beban trapesium seperti gambar di bawah.



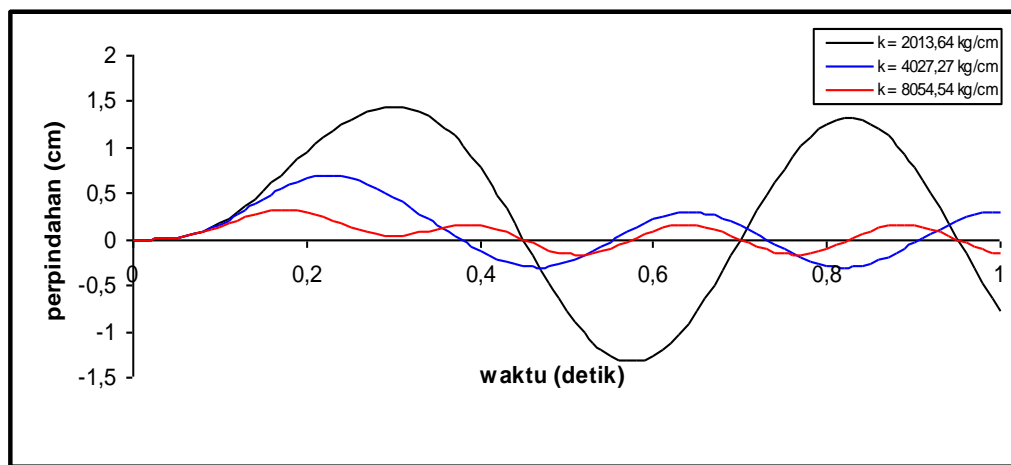
Variasi massa dengan kekakuan tetap pada sistem tak teredam

Berikut merupakan grafik hasil hitungan perpindahan akibat beban trapesium dengan kekakuan tetap = 4027,27 kg/cm dan massa bervariasi. Waktu vs perpindahan dengan variasi massa akibat beban trapesium pada sistem tak teredam



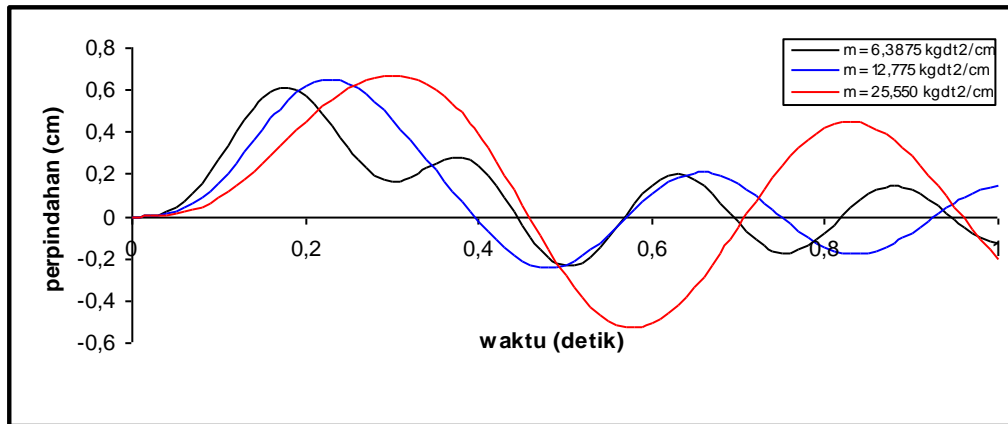
Variasi kekakuan dengan massa tetap pada sistem tak teredam

Berikut merupakan grafik hasil hitungan perpindahan akibat beban trapesium dengan massa tetap = $12,776 \text{ kgdt}^2/\text{cm}$ dan kekakuan bervariasi. Waktu vs perpindahan dengan variasi kekakuan akibat beban trapesium pada sistem tak teredam dapat dilihat pada gambar berikut ini.



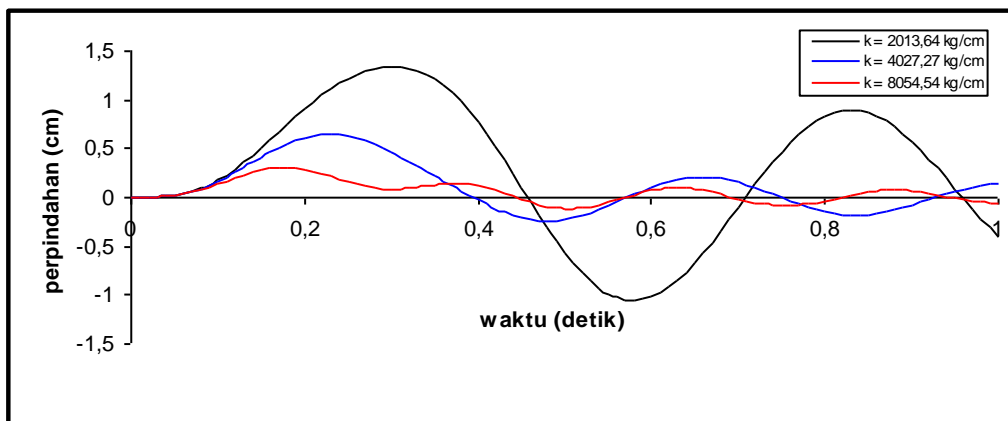
Variasi massa dengan kekakuan tetap pada sistem teredam

Berikut merupakan grafik hasil hitungan perpindahan akibat beban trapesium dengan kekakuan tetap = $4027,27 \text{ kg/cm}$ dan massa bervariasi yang diberi redaman sebesar 5%. Waktu vs perpindahan dengan variasi massa akibat beban trapesium pada sistem teredam 5% dapat dilihat pada gambar berikut ini.



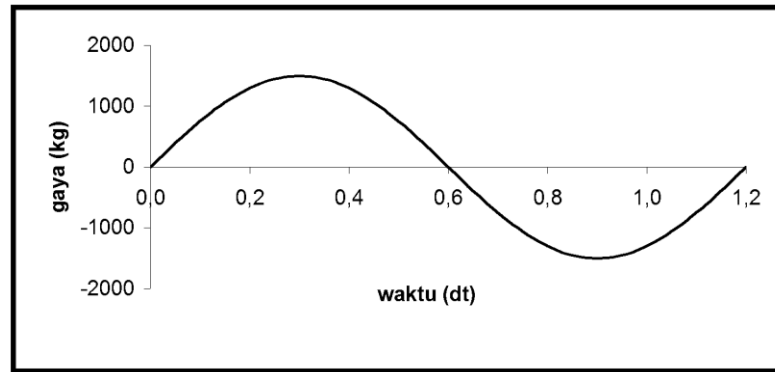
Variasi kekakuan dengan massa tetap pada sistem teredam

Berikut merupakan grafik hasil hitungan perpindahan akibat beban trapesium dengan massa tetap = $12,776 \text{ kgdt}^2/\text{cm}$ dan kekakuan bervariasi dengan redaman sebesar 5%. Waktu vs perpindahan dengan variasi kekakuan akibat beban trapesium pada sistem teredam 5% dapat dilihat pada gambar berikut ini.



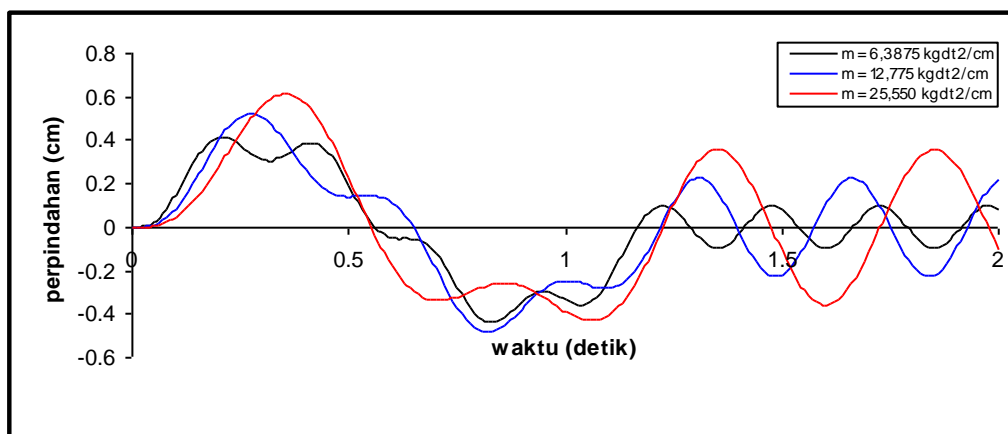
4. Beban sinusoidal

Berikut dihitung respon akibat fungsi beban sinusoidal $P(t) = 1500 \sin(\pi t/0,6)$ selama 1,2 detik.



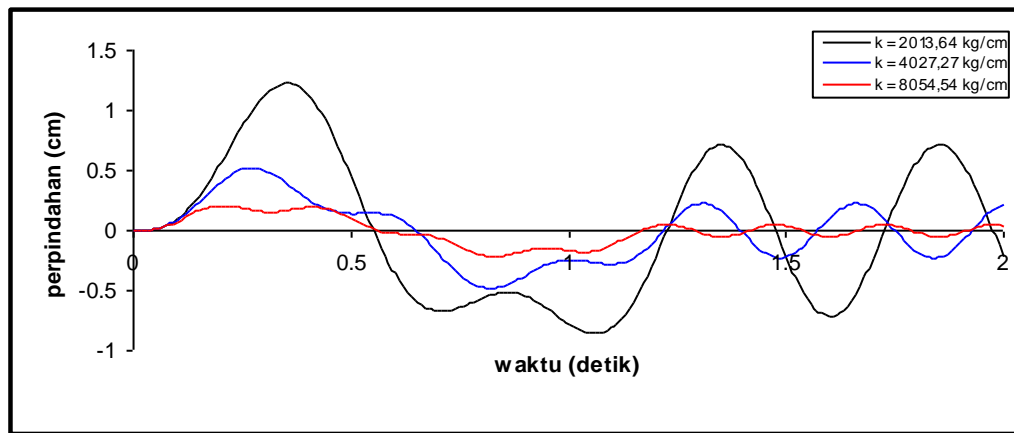
Variasi massa dengan kekakuan tetap pada sistem tak teredam

Berikut merupakan grafik hasil hitungan perpindahan akibat beban sinusoidal dengan kekakuan tetap = 4027,27 kg/cm dan massa bervariasi. Waktu vs perpindahan dengan variasi massa akibat beban sinusoidal pada sistem tak teredam.



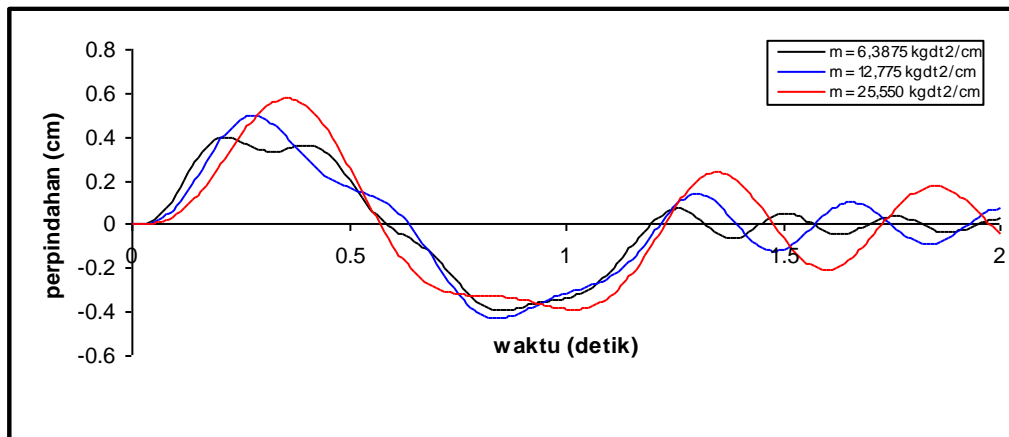
Variasi kekakuan dengan massa tetap pada sistem tak teredam

Berikut merupakan grafik hasil hitungan perpindahan akibat beban sinusoidal dengan massa tetap = 12,776 kgd²/cm dan kekakuan bervariasi. Waktu vs perpindahan dengan variasi kekakuan akibat beban sinusoidal pada sistem tak teredam dapat dilihat pada gambar berikut ini.



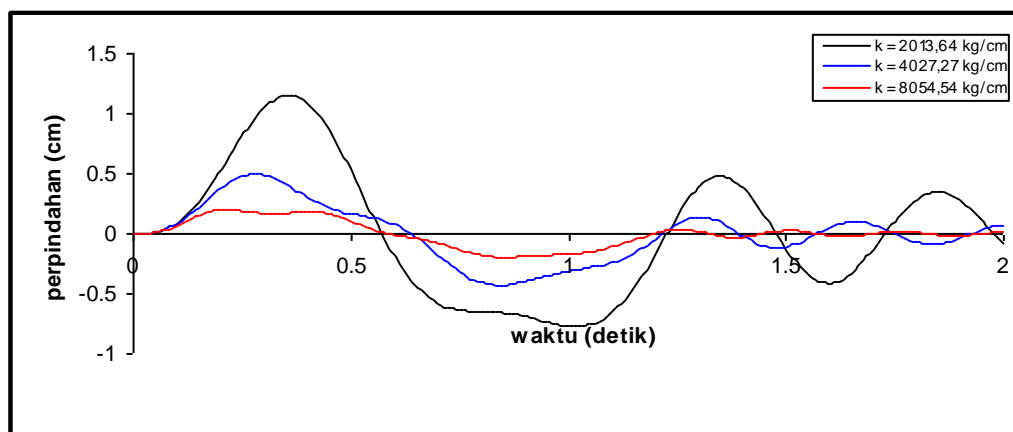
Variasi massa dengan kekakuan tetap pada sistem teredam

Berikut merupakan grafik hasil hitungan perpindahan akibat beban sinusoidal dengan kekakuan tetap = 4027,27 kg/cm dan massa bervariasi yang diberi redaman sebesar 5%. Waktu vs perpindahan dengan variasi massa akibat beban sinusoidal pada sistem teredam 5% seperti yang terlihat pada gambar berikut ini.



Variasi kekakuan dengan massa tetap pada sistem teredam

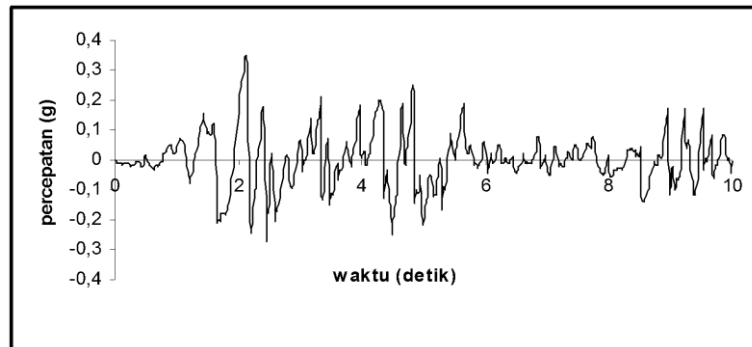
Berikut merupakan grafik hasil hitungan perpindahan akibat beban sinusoidal dengan massa tetap = $12,776 \text{ kgdt}^2/\text{cm}$ dan kekakuan bervariasi dengan redaman sebesar 5%. Waktu vs perpindahan dengan variasi kekakuan akibat beban sinusoidal pada sistem teredam 5%



5. Beban gempa

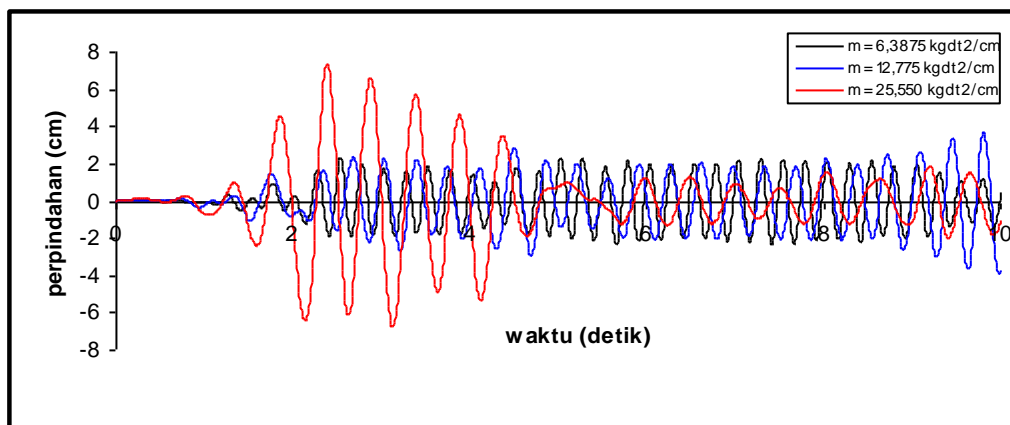
Berikut dihitung respon akibat fungsi beban gempa seperti gambar di bawah.

Dalam hal ini digunakan gempa EL-Centro seperti pada gambar di bawah ini.



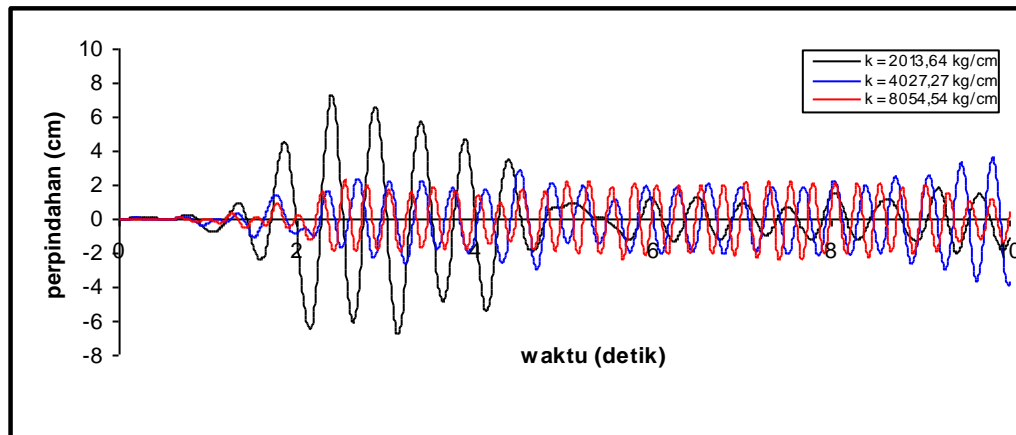
Variasi massa dengan kekakuan tetap pada sistem tak teredam

Grafik hasil perhitungan perpindahan akibat gempa dengan kekakuan tetap = 4027,27 kg/cm dan massa bervariasi. Waktu vs perpindahan dengan variasi massa akibat beban gempa pada sistem tak teredam seperti pada gambar di bawah ini.



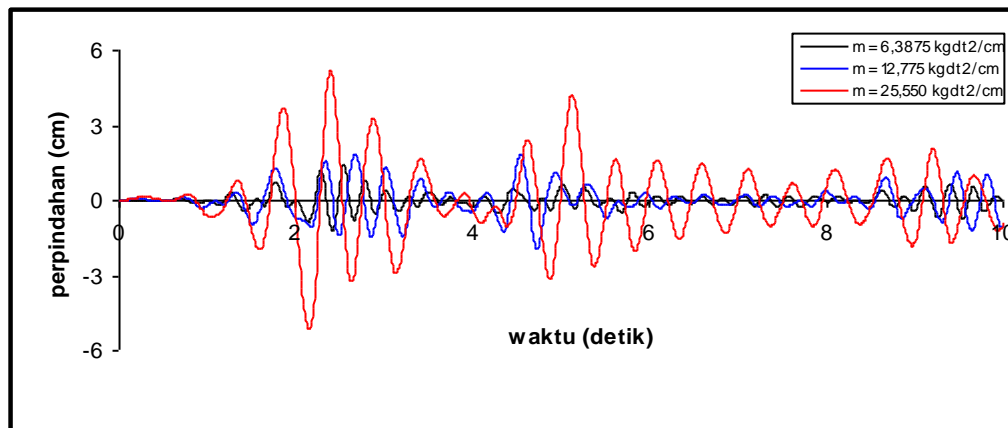
Variasi kekakuan dengan massa tetap pada sistem tak teredam

Berikut merupakan grafik hasil hitungan perpindahan akibat beban gempa dengan massa tetap = 12,776 kgdt²/cm dan kekakuan bervariasi. Waktu vs perpindahan dengan variasi kekakuan akibat beban gempa pada sistem tak teredam



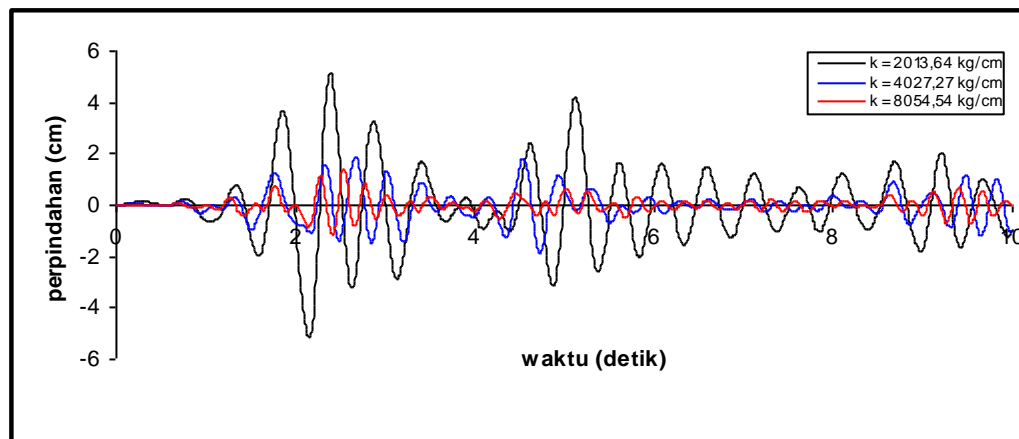
Variasi massa dengan kekakuan tetap pada sistem teredam

Berikut merupakan grafik hasil hitungan perpindahan akibat beban gempa dengan kekakuan tetap = 4027,27 kg/cm dan massa bervariasi yang diberi redaman sebesar 5%. Waktu vs perpindahan dengan variasi massa akibat beban gempa pada sistem teredam 5% seperti pada gambar di bawah ini.



Variasi kekakuan dengan massa tetap pada sistem teredam

Berikut merupakan grafik hasil hitungan perpindahan akibat beban gempa dengan massa tetap = $12,776 \text{ kgdt}^2/\text{cm}$ dan kekakuan bervariasi dengan redaman sebesar 5%. Waktu vs perpindahan dengan variasi kekakuan akibat beban gempa pada sistem teredam 5% seperti yang terlihat pada gambar di bawah ini.

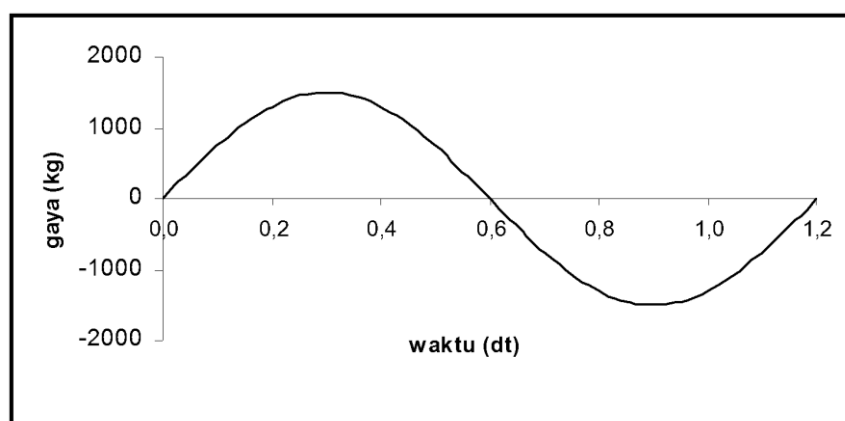
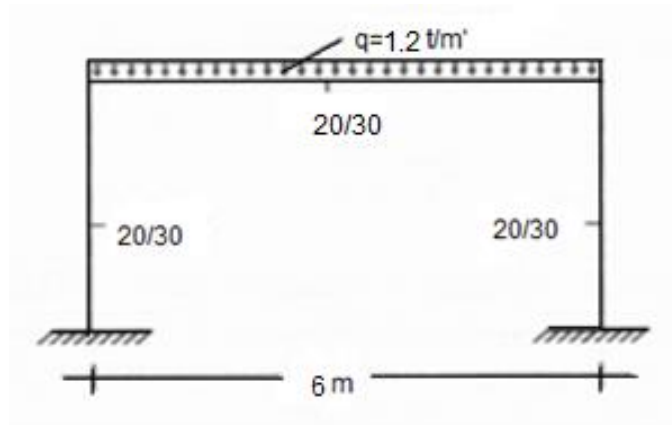


4.7 Rangkuman

- Respons struktur akibat pembebanan beban dinamik akan menimbulkan perpindahan, kecepatan dan percepatan struktur.
- Beban dinamik yaitu pembebanan yang terikat fungsi waktu (t) seperti beban harmonik (beban sinus dan beban cosinus), beban berpola (segiempat, segitiga dan trapezium), beban kejut (beban tiang pancang) maupun beban acak (beban gempa)
- Salah satu metode penyelesaian persamaan gerak dari sistem dengan derajat kebebasan tunggal adalah dengan Integral Duhamel. Untuk itu agar lebih memudahkan dapat dibuat dalam bentuk program komputer.

4.8 Soal Latihan

Suatu sistem derajat kebebasan tunggal mempunyai dimensi dan pembebanan seperti pada gambar di bawah ini. Diketahui modulus elastik beton $E_b = 2,2 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$ dan percepatan gravitasi $g = 980 \text{ cm/dt}^2$. Sistem dibebani dengan beban dinamik fungsi sinus sebesar $P(t) = 1200 \sin(\pi t/0,3)$ seperti pada gambar di bawah ini selama 2 detik. Tentukanlah massa dan kekakuan dari struktur di bawah ini.

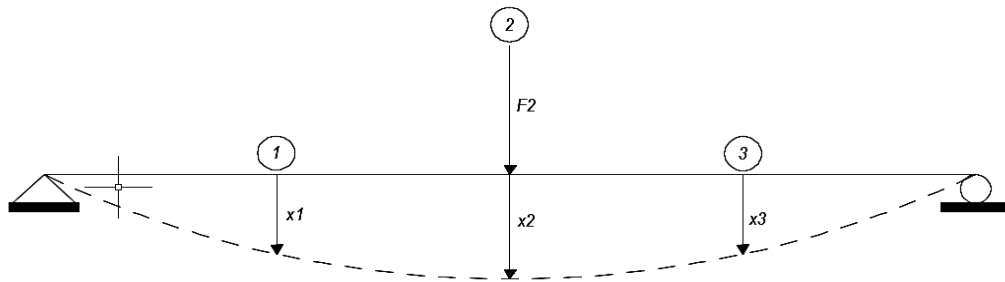


BAB 5

SISTEM DERAJAT – KEBEBASAN BANYAK (MULTI DEGREE OF FREEDOM)

5.1. Matriks Fleksibilitas

Gaya dan perpindahan yang terdapat dalam suatu struktur dapat dihubungkan satu sama lain dengan menggunakan baik koefisien fleksibilitas ataupun koefisien kekakuan. Analisis struktur pada umumnya dilakukan dengan menghitung koefisien fleksibilitas daripada koefisien kekakuan. Ilustrasi balok sederhana yang terdapat pada Gambar 5.1 menunjukkan adanya gaya luar berupa F_2 yang terpusat pada tengah bentang balok. Dengan adanya gaya luar berupa F_2 pada titik 2, maka terjadi defleksi di 3 titik, yaitu titik 1, 2 dan 3 yang disimbolkan dengan x_1 , x_2 dan x_3 .



Gambar 5. 1 Ilustrasi Balok Sederhana

Defleksi yang terjadi pada titik – titik tersebut dapat dijabarkan dengan Persamaan 5.1

$$x_1 = a_{11} F_2$$

$$x_2 = a_{22}F_2$$

$$x_3 = a_{32}F_2$$

Dimana a_{12} , a_{22} , a_{32} merupakan symbol dari koefisien fleksibilitas. Apabila terdapat 2 gaya luar lain berupa F_1 pada titik 1 dan F_3 pada titik 3, maka persamaan defleksi dijabarkan seperti Persamaan 5.1

$$x_1 = a_{11}F_1 + a_{12}F_2 + a_{13}F_3$$

$$x_2 = a_{21}F_1 + a_{22}F_2 + a_{23}F_3$$

$$x_3 = a_{31}F_1 + a_{32}F_2 + a_{33}F_3$$

Jika dibentuk dalam suatu matriks maka akan menjadi

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

Atau secara umum dapat dijabarkan sebagai

$$\{x\} = [a]\{F\}$$

Dengan catatan, besar nilai $a_{ij} = a_{ji}$

5.2.Matriks Kekakuan

Salah satu metode untuk menentukan hubungan antara besar gaya yang diterima oleh struktur dengan deformasinya adalah menggunakan matriks kekakuan.

Dengan menganggap balok pada Gambar 5.2(a) memiliki momen sebesar M_1 terjadi pada titik 1 yang berhubungan dengan rotasi θ_1 , maka didapat rumus:

$$M_1 = k_{11}\theta_1$$

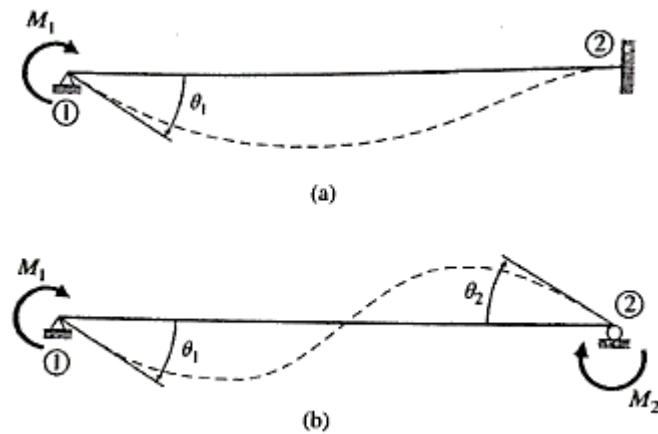
k_{11} adalah kekakuan pada titik 1 dari balok pada Gambar 5.3(a)

Jika balok dianggap dapat berotasi pada titik 2 seperti yang terjadi pada titik 1, maka besar M_1 dapat dirumuskan sebagai berikut

$$M_1 = k_{11}\theta_1 + k_{12}\theta_2$$

Dengan cara yang sama, momen M_2 pada titik 2 juga dapat dirumuskan sebagai berikut

$$M_2 = k_{21}\theta_1 + k_{22}\theta_2$$



Gambar 5. 2 Ilustrasi Balok yang Mengalami Rotasi Akibat Kekakuan

Persamaan M_1 dan M_2 dibentuk menjadi matriks

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

atau lazim dirumuskan dengan

$$\{F\} = \{k\}\{x\}$$

Dimana $\{k\}$ adalah matriks kekakuan, $\{F\}$ adalah matriks gaya dan $\{x\}$ adalah matriks perpindahan. Apabila matriks $\{k\}$ diinverskan, maka akan didapat persamaan untuk menghitung matriks perpindahan $\{x\}$

$$\{x\} = \{k\}^{-1} \{F\}$$

Sama halnya dengan matriks fleksibilitas, matriks kekakuan juga simetris terhadap diagonal utama, sehingga

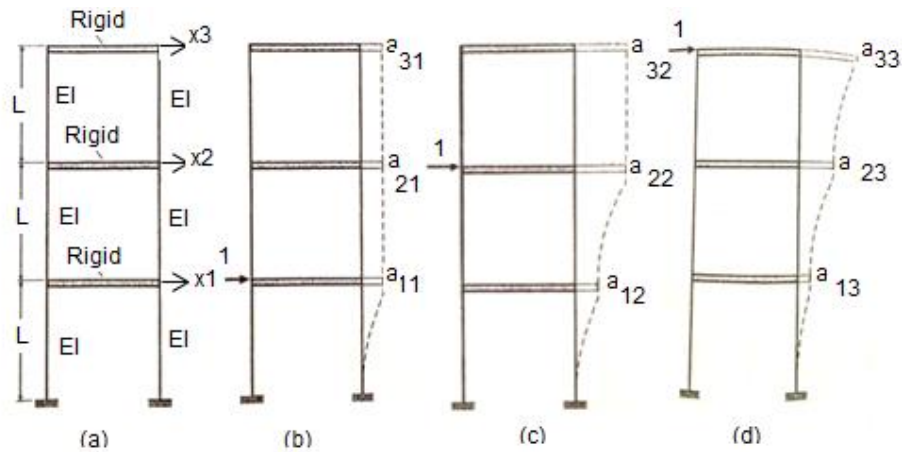
$$k_{ij} = k_{ji}$$

Secara umum kekakuan dapat didefinisikan sebagai besar gaya yang dibutuhkan (atau momen) untuk menghasilkan 1 satuan perpindahan (atau rotasi) pada suatu titik sambung (*joint*) dalam struktur.

5.3. Contoh Soal dan Penyelesaian

Contoh 5.1

Bentuklah matriks fleksibilitas untuk portal 3 lantai seperti pada Gambar 5.3 dengan asumsi tinggi antar lantai adalah L , besar kekakuan adalah EI dan elemen horizontal dianggap sangat kaku (*rigid*)



Gambar 5. 3 Portal 3 Derajat Kebebasan

(b) Perhitungan Matriks Fleksibilitas Kolom Pertama; (c) Perhitungan Matriks Fleksibilitas Kolom Kedua; (d) Perhitungan Matriks Fleksibilitas Kolom Ketiga

Pembahasan:

Untuk memperoleh matriks fleksibilitas pada kolom pertama, diasumsikan terdapat gaya horizontal sebesar 1 satuan pada lantai 1 seperti Gambar 5.2(a).

Translasi arah horizontal pada lantai 1 dapat dirumuskan dengan:

$$a_{11} = a_{21} = a_{31} = \frac{L^3}{24EI}$$

Dengan perlakuan sama, kolom kedua juga diberi gaya sebesar 1 satuan seperti pada Gambar 5.3(b), maka:

$$a_{12} = \frac{L^3}{24EI}$$

$$a_{22} = \frac{L^3}{24EI} + \frac{L^3}{24EI} = \frac{L^3}{12EI}$$

$$a_{32} = \frac{L^3}{12EI}$$

Matriks fleksibilitas kolom ketiga ditentukan dengan mengaplikasikan gaya sebesar satu satuan pada lantai teratas dari portal sehingga

$$a_{13} = \frac{L^3}{24EI}$$

$$a_{23} = \frac{L^3}{24EI} + \frac{L^3}{24EI} = \frac{L^3}{12EI}$$

$$a_{33} = \frac{L^3}{24EI} + \frac{L^3}{24EI} + \frac{L^3}{24EI} = \frac{L^3}{8EI}$$

Maka matriks fleksibilitas dari portal 3 sesuai Gambar 5.3 adalah

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} \frac{L^3}{24} & \frac{L^3}{24} & \frac{L^3}{24} \\ \frac{L^3}{24} & \frac{L^3}{12} & \frac{L^3}{12} \\ \frac{L^3}{24} & \frac{L^3}{12} & \frac{L^3}{8} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

Contoh 5.2

Bentuklah matriks kekakuan dari kolom yang terdapat pada sistem seperti pada Gambar 5.4(a)

Pembahasan

Sistem yang terdapat pada Gambar 5.4(a) memiliki 4 derajat kebebasan (DOF), maka dari itu matriks kekakuan akan memiliki dimensi 4×4 . Untuk

memperoleh nilai kekakuan pada kolom pertama, massa m_1 diberikan perpindahan sebesar 1 satuan dan massa lainnya dianggap tidak mengalami perpindahan sehingga $x_1 = 1$ dan $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ seperti pada Gambar 5.4(b), maka

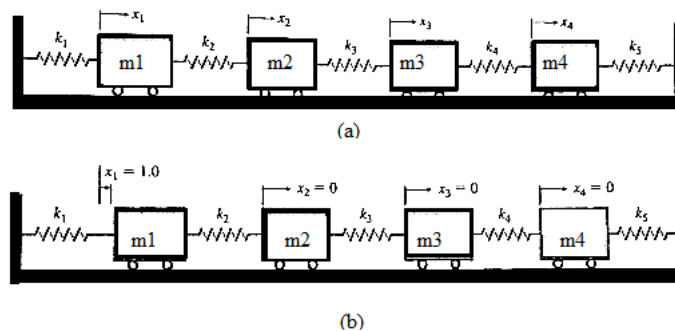
$$k_{11} = k_1 + k_2 \quad k_{31} = 0$$

$$k_{21} = -k_2 \quad k_{41} = 0$$

Matriks kekakuan kolom kedua diperoleh dengan menetapkan nilai $x_2 = 1$ dan $x_1 = x_3 = x_4 = 0$, sehingga

$$k_{12} = -k_2 \quad k_{32} = -k_3$$

$$k_{22} = k_2 + k_3 \quad k_{42} = 0$$



Gambar 5. 4 Sistem 4 DOF dan Kalkulasi Koefisien Kekakuan Kolom

Hal yang sama dilakukan terhadap kolom ketiga yaitu menetapkan nilai $x_3 = 1$ dan $x_1 = x_2 = x_4 = 0$

$$k_{13} = 0 \quad k_{33} = k_3 + k_4$$

$$k_{23} = -k_3 \quad k_{43} = -k_4$$

Begitu juga terhadap kolom ketiga yaitu menetapkan nilai $x_3 = 1$ dan $x_1 = x_2 = x_4 = 0$

$$k_{14} = 0$$

$$k_{34} = -k_4$$

$$k_{24} = -k_3$$

$$k_{44} = k_4 + k_3$$

Dari seluruh persamaan diatas, maka dapat dibentuk matriks kekakuan sistem menjadi

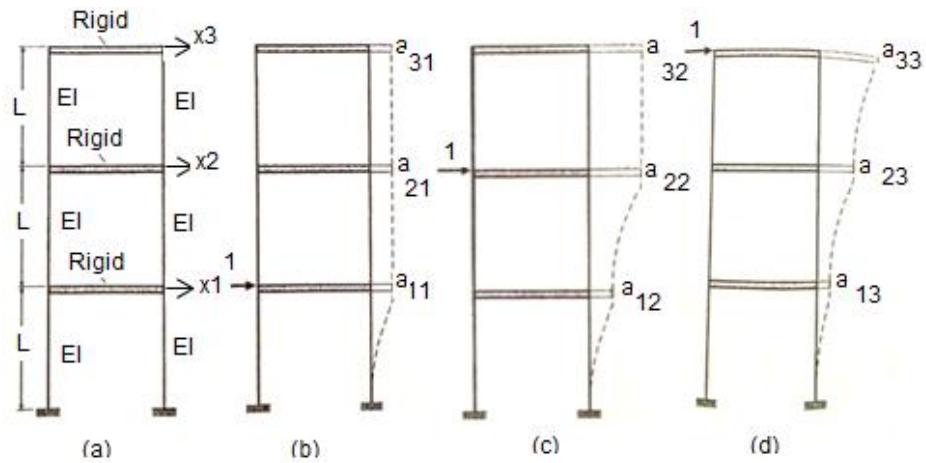
$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 + k_5 \end{bmatrix}$$

5.4. Rangkuman

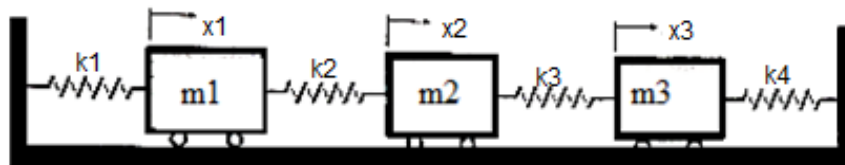
- Gaya dan perpindahan yang terdapat dalam suatu struktur dapat dihubungkan satu sama lain dengan menggunakan koefisien fleksibilitas ataupun koefisien kekakuan.
- Analisis struktur pada umumnya dilakukan dengan menghitung koefisien fleksibilitas daripada koefisien kekakuan.
- Defleksi yang ditimbulkan dengan metode fleksibilitas merupakan perkalian gaya dengan koefisien fleksibilitas.
- Kekakuan merupakan besarnya gaya yang dibutuhkan (atau momen) untuk menghasilkan 1 satuan perpindahan (atau rotasi) pada suatu titik sambung (*joint*) dalam struktur.

5.5. Soal Latihan

7. 1. Bentuklah matriks fleksibilitas untuk portal 3 lantai seperti pada gambar di bawah ini dengan tinggi antar lantai adalah 3.5 meter, besar kekakuan adalah 2500 Kg.cm^2 dan elemen horizontal dianggap sangat kaku (*rigid*)



7. 2. Bentuklah matriks kekakuan dari kolom yang terdapat pada sistem seperti pada gambar di bawah ini.



BAB 6

RESPON SISTEM BERDERAJAT KEBEBASAN BANYAK (MDOF) TERHADAP PEMBEBANAN DINAMIS

6.1 Analisis Respon Dinamik Sistem MDOF dengan Metode *Newmark - β*

Metode *Newmark - β* membutuhkan input berupa karakteristik dari suatu sistem MDOF yang akan dianalisis, yaitu matriks kekakuan $[k]$, matriks massa $[m]$ dan matriks redaman $[c]$ dari tiap – tiap tingkat derajat kebebasan. Hal lain yang membedakan analisis respon dinamik suatu sistem menggunakan metode *Newmark - β* ini adalah diperlukannya nilai awal dari perpindahan $\{x\}_0$ dan kecepatan $\{\dot{x}\}_0$. Nilai awal dari perpindahan dan kecepatan tersebut nantinya akan digunakan dalam menghitung nilai percepatan awal dari suatu sistem menggunakan Persamaan (6.1).

$$\{\ddot{x}\}_0 = [m]^{-1}(\{F_{(0)}\} - [c]\{\dot{x}\}_0 + [k]\{x\}_0) \quad (6.1)$$

Dimana:

$[m]$ = matriks massa sistem

$F_{(0)}$ = beban yang diterima sistem

$[c]$ = matriks redaman sistem

$\{x\}_0$ = perpindahan awal sistem

$\{\dot{x}\}_0$ = kecepatan awal sistem

$[k]$ = matriks kekakuan sistem

Langkah selanjutnya yang dilakukan adalah menentukan *time step* (Δt), parameter alpha (α) dan delta (δ) dan menghitung konstanta integrasi. Nilai delta

harus lebih besar atau sama dengan 0.50 sedangkan nilai alpha dihitung menggunakan Persamaan 6.2.

$$\alpha \geq 0.25(0.5 + \delta)^2 \quad (6.2)$$

Setelah nilai alpha dan delta didapat, maka perhitungan konstanta integrasi dari a_0 hingga a_8 dengan Persamaan 6.3.a hingga 6.3.h

$$a_0 = \frac{1}{\alpha(\Delta t)^2} \quad (6.3.a) \quad a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1 \quad (6.3.e)$$

$$a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \quad (6.3.b) \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right) \quad (6.3.f)$$

$$a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t} \quad (6.3.c) \quad a_6 = \Delta t(1 - \delta) \quad (6.3.g)$$

$$a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1 \quad (6.3.d) \quad a_7 = \delta \Delta t \quad (6.3.h)$$

Apabila seluruh nilai konstanta integrasi telah dihitung, maka akan dilanjutkan ke pembentukan matriks kekakuan efektif $[\hat{k}]$ dengan Persamaan 6.4.

$$[\hat{k}] = [k] + a_0[m] + a_1[c] \quad (6.4)$$

Perhitungan terhadap respons dinamik sistem dilanjutkan ke tiap – tiap *time step*, dimulai dari menghitung nilai efektif fungsi dari beban yang diterima oleh sistem $F(t)$ dengan Persamaan 6.5, perpindahan, percepatan dan kecepatan saat *time step* $t+\Delta t$ dengan Persamaan 6.6, 6.7 dan 6.8.

$$\begin{aligned} \{\hat{F}\}_{t+\Delta t} &= \{\hat{F}\}_{t+\Delta t} + [m](a_0\{x\}_t + a_2\{\dot{x}\}_t + a_3\{\ddot{x}\}_t) \\ &+ [c](a_1\{x\}_t + a_4\{\dot{x}\}_t + a_5\{\ddot{x}\}_t) \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$\{x\}_{t+\Delta t} = [\hat{k}]^{-1} \{\hat{F}\}_{t+\Delta t} \quad (6.7)$$

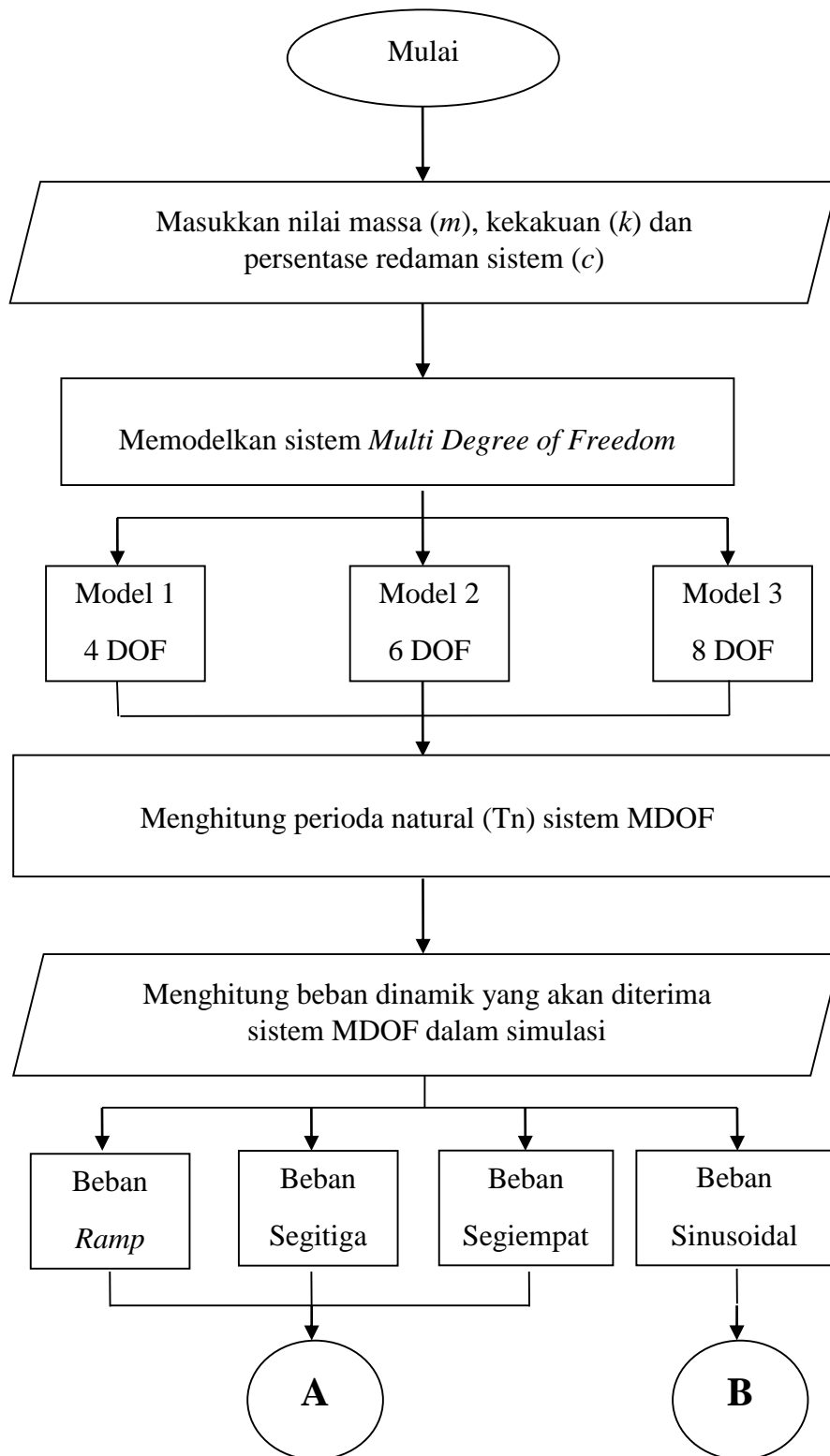
$$\{\ddot{x}\}_{t+\Delta t} = a_0(\{x\}_{t+\Delta t} - \{x\}_t) - a_2\{\dot{x}\}_t - a_3\{\ddot{x}\}_t \quad (6.8)$$

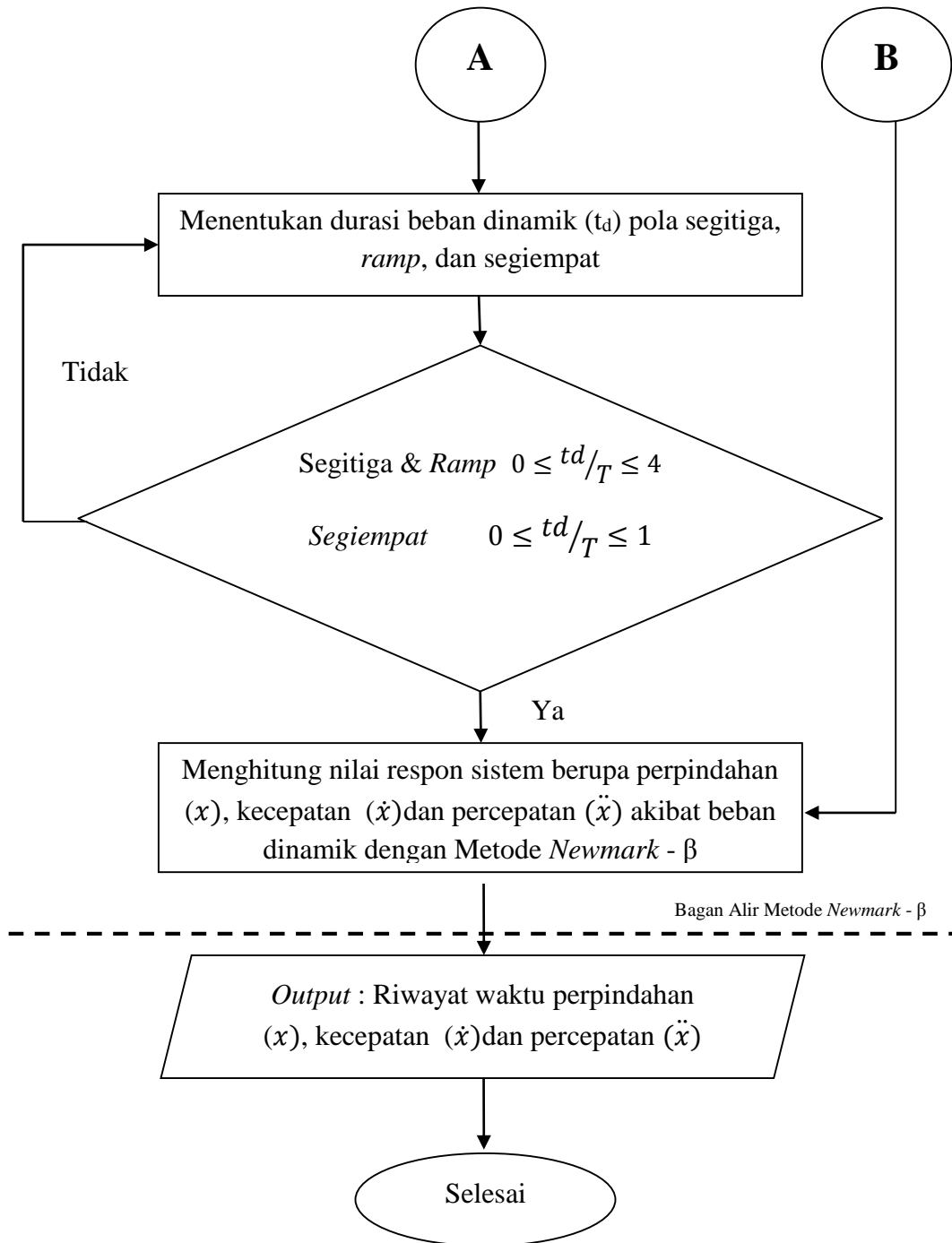
$$\{\dot{x}\}_{t+\Delta t} = \{\dot{x}\}_t + a_6\{\dot{x}\}_t + a_3\{\ddot{x}\}_{t+\Delta t} \quad (6.9)$$

Perhitungan diulangi hingga *time step* mencapai interval waktu total yang ditentukan. Hasil analisis respons dinamik sistem MDOF dengan menggunakan metode *Newmark* – β ini berupa riwayat waktu nilai perpindahan, kecepatan dan percepatan dalam setiap $t+\Delta t$. Menurut Chopra (2012) besar nilai *time step* pada metode *Newmark* – β dapat ditentukan sesuai dengan nilai α (α) dan δ (δ) yang digunakan dan berbanding terbalik dengan nilai perioda natural (T_n). Secara singkat perbandingan antara Δt dapat dihitung dengan Persamaan 6.9.

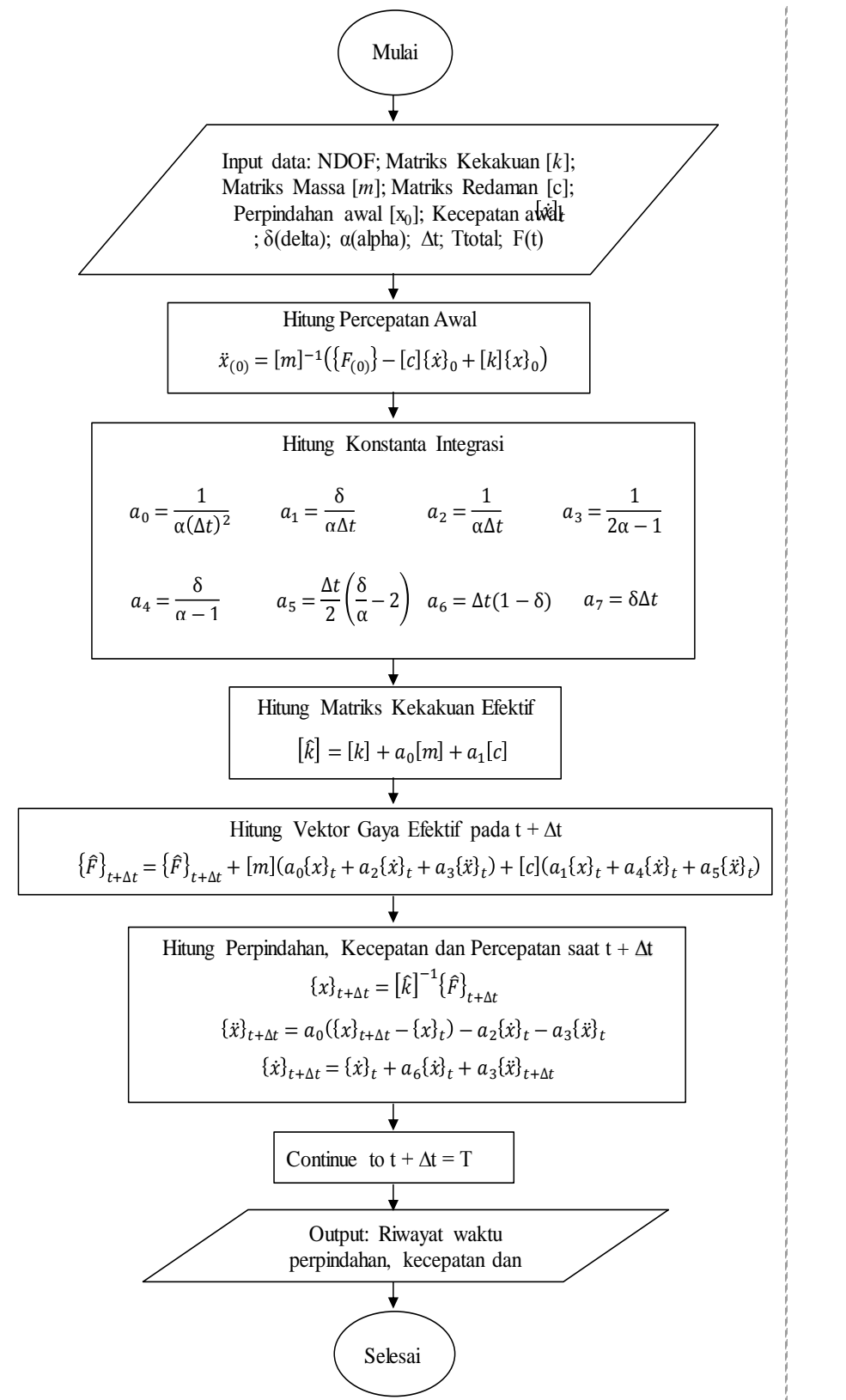
$$\frac{\Delta t}{T_n} \leq \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\alpha - 2\delta}}$$

Adapun bagan alir penyelesaian respon sistem MDOF terhadap pembebanan dinamis dengan metode *Newmark*- β , dapat dilihat pada Gambar 6.1. Pada bagan alir tersebut dapat dilihat, setelah model portal sistem dibuat sesuai dengan batasan masalah yang telah ditetapkan, selanjutnya dilakukan *input* terhadap nilai variabel massa (m), kekakuan (k) dan koefisien *structural damping* (c) yang digunakan dalam analisis. Analisis terhadap model sistem dilakukan dengan bantuan *listing program software* FORTRAN menggunakan metode *Newmark*- β seperti yang dapat dilihat pada Gambar 6.2.





Gambar 6. 1 Bagan Alir Tahap Perhitungan Respon Sistem MDOF



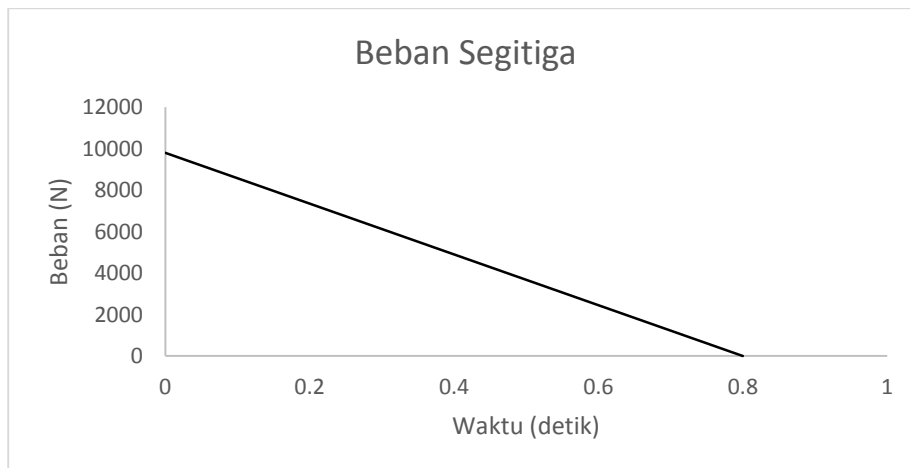
Gambar 6. 2 Bagan Alir Metode *Newmark – beta*

6.2 Pembebanan Dinamis

Data beban dinamik yang digunakan berbeda-beda tergantung dari tipe beban. Nilai gaya yang diberikan (F_0) akan berubah terhadap waktu sesuai dengan fungsi masing-masing beban. Namun secara keseluruhan nilai (F_0) yang digunakan pada beban sinusoidal, segitiga, segiempat dan *ramp* adalah massa mesin sebesar 1000 kg.

6.2.1. Beban Segitiga

Beban dengan pola segitiga yang akan digunakan dalam analisis memiliki durasi waktu selama 0.8 detik dimana batasan durasi untuk beban segitiga adalah $0 \leq td/T \leq 4$ dengan Δt sebesar 0.01 detik. Grafik beban segitiga dapat dilihat pada Gambar 6.3.

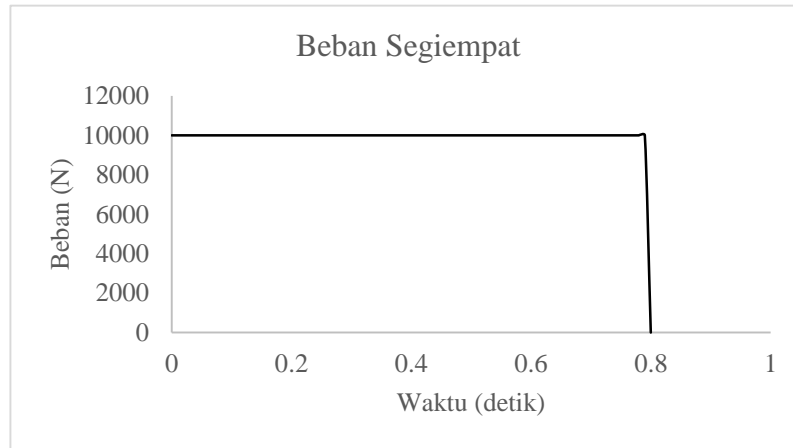


Gambar 6. 3 Grafik Fungsi Gaya Pola Beban Segitiga

6.2.2. Beban Segiempat

Beban dengan pola segiempat yang akan digunakan dalam analisis memiliki durasi waktu selama 0.8 detik dimana batasan durasi untuk beban segitiga adalah $0 \leq$

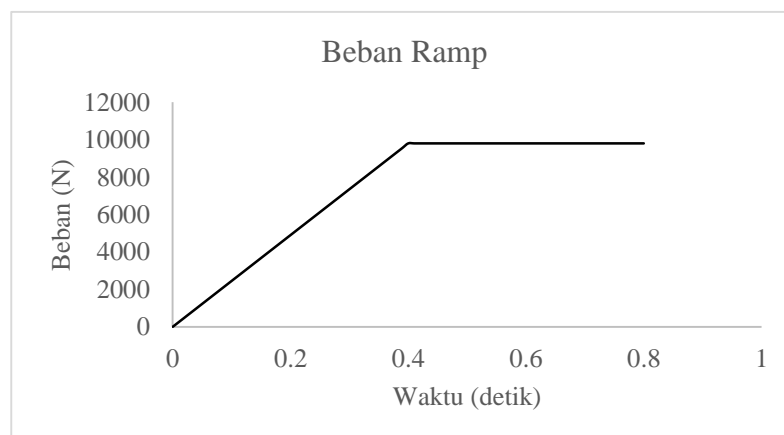
$td/T \leq 1$ dengan Δt sebesar 0.01 detik. Grafik beban segiempat dapat dilihat pada Gambar 6.4.



Gambar 6. 4 Grafik Fungsi Gaya Pola Beban Segiempat

6.2.3. Beban *Ramp*

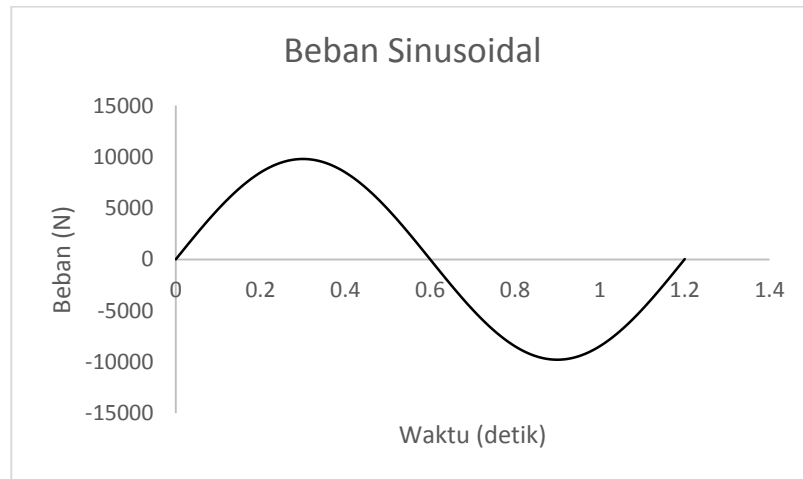
Beban dengan pola *ramp* yang akan digunakan dalam analisis memiliki durasi waktu selama 0.8 detik dimana batasan durasi untuk beban segitiga adalah $0 \leq td/T \leq 4$ dengan Δt sebesar 0.01 detik. Grafik beban *ramp* dapat dilihat pada Gambar 6.5.



Gambar 6. 5 Grafik Fungsi Gaya Pola Beban *Ramp*

6.2.4. Beban Sinusoidal

Beban sinusoidal yang digunakan dalam analisis memiliki durasi waktu selama 1.2 detik atau satu gelombang penuh dengan Δt sebesar 0.01 detik. Grafik beban sinusoidal dapat dilihat pada Gambar 6.6.



Gambar 6. 6 Grafik Fungsi Gaya Beban *Sinusoidal*

6.3 Contoh Soal dan Penyelesaian

Contoh 6.1

Sesuai dengan bagan alir yang terdapat pada Gambar 6.1, perhitungan respon sistem berupa perpindahan (x), kecepatan (\dot{x}) dan percepatan (\ddot{x}) dilakukan secara tahap demi tahap sesuai dengan besar nilai *time step* (Δt) yang digunakan. Nilai *time step* yang digunakan tergantung dari perioda natural dari sistem maupun struktur.

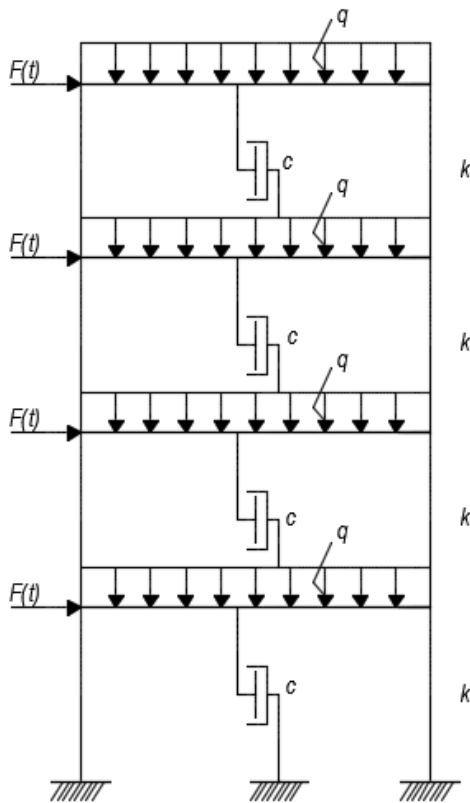
Penelitian yang dilakukan oleh Rompas, Wallah, Windah & Dapas (2015) tentang kestabilan metode *Newmark* telah membuktikan bahwa kestabilan dan akurasi terhadap hasil respons struktur ditentukan oleh nilai α (alpha) dan δ (delta)

yang digunakan. Metode *Newmark* memiliki kestabilan dan akurasi lebih baik apabila menggunakan prinsip percepatan linear ($\alpha = 1/2$ dan $\delta = 1/6$) dibandingkan dengan prinsip percepatan rata-rata ($\alpha = 1/2$ dan $\delta = 1/4$). Nilai rata – rata Δt menggunakan prinsip percepatan linear adalah sebesar $\Delta t \leq 0.551 T$ (Chopra, 2012).

Contoh perhitungan dilakukan dengan data acuan sistem 4 DOF yang terdapat pada Tabel 6.1 dan beban sinusoidal sebagai beban luar pada *time step* $0 + 0.01$. Berdasarkan nilai kekakuan dan massa yang telah ditetapkan sebagai acuan, sistem divariasikan lagi menjadi 3 variasi berbeda yang akan dianalisis, secara detail variasi sistem dapat dilihat pada Tabel 6.1.

Tabel 6. 1 Variasi Massa dan Kekakuan

Model	Massa (kg)	Kekakuan (N/m)	Redaman (%)	Keterangan
1.	4202.5	12374718.5	5	Acuan
2.	4202.5	6187359.25	5	Massa tetap, kekakuan setengah acuan
3.	2101.25	12374718.5	5	Massa setengah acuan, kekakuan tetap
4.	8405	24749437	5	Massa dua kali acuan, kekakuan dua kali acuan



Massa : 4202.5 kg
 Kekakuan : 12374718.5 N/m
 % Redaman : 5%
 g : 9.81 m/dt²
 x_0 : 0 m
 \dot{x}_0 : 0 m/dt
 $\alpha = 1/2$ dan $\delta = 1/6$

Pembahasan :

Langkah Perhitungan Metode *Newmark* – β

1. Menghitung nilai percepatan awal (\ddot{x}_0)

$$\{\ddot{x}\}_0 = [m]^{-1}(\{F_{(0)}\} - [c]\{\dot{x}\}_0 + [k]\{x\}_0)$$

Matriks massa $[m]$

$$[m] = \begin{bmatrix} 4202.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4202.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4202.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4202.5 \end{bmatrix} kg$$

Matriks kekakuan $[k]$

$$\begin{bmatrix} 24749437 & -12374728.5 & 0 & 0 \\ -12374728.5 & 24749437 & -12374728.5 & 0 \\ 0 & -12374728.5 & 24749437 & -12374728.5 \\ 0 & 0 & -12374728.5 & 12374728.5 \end{bmatrix} N/m$$

Matriks redaman [c]

$$[c] = \begin{bmatrix} 16490.61 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16490.61 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16490.61 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8245.305 \end{bmatrix} N \cdot dt/m$$

Berdasarkan grafik beban yang digunakan, yaitu beban sinusoidal pada Gambar 6.1 dapat dilihat bahwa gaya yang diterima sistem saat 0 detik (F_0) adalah 0 N, maka matriks F_0

$$[F_0] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} N$$

Karena nilai perpindahan awal (x_0) dan kecepatan awal (\dot{x}_0) masing – masing adalah 0 m dan 0 m/dt, maka persamaan untuk menghitung percepatan awal menjadi

$$\{\ddot{x}\}_0 = [m]^{-1}[F_0]$$

$$\{\ddot{x}\}_0 = \begin{bmatrix} 4202.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4202.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4202.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4202.5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} m/dt^2$$

2. Menghitung Konstanta Integrasi ($\alpha = 1/2$ dan $\delta = 1/6$)

- $a_0 = \frac{1}{\alpha(\Delta t)^2}$
 $a_0 = \frac{1}{0.5(0.01)^2} = 20000$
- $a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t}$
 $a_1 = \frac{1/6}{0.5(0.01)} = 33.333$
- $a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}$
 $a_2 = \frac{1}{0.5(0.01)} = 200$
- $a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1$
 $a_3 = \frac{1}{(2 \times 0.5)} - 1 = 0$ n Efe
- $a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1$
 $a_4 = \frac{1/6}{0.5} - 1 = 0.333$
- $a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right)$
 $a_5 = \frac{0.01}{2} \left(\frac{1}{0.5} - 2 \right) = -0.00833$
- $a_6 = \Delta t(1 - \delta)$
 $a_6 = 0.00833$
- $a_7 = \delta \Delta t$
 $a_7 = 0.00167$

Matriks kekakuan efektif dihitung dengan Persamaan 6.4

$$[\hat{k}] = [k] + a_0[m] + a_1[c]$$

Dimana;

$$[k] = \begin{bmatrix} 24749437 & -12374728.5 & 0 & 0 \\ -12374728.5 & 24749437 & -12374728.5 & 0 \\ 0 & -12374728.5 & 24749437 & -12374728.5 \\ 0 & 0 & -12374728.5 & 12374728.5 \end{bmatrix}$$

$$a_0[m] = 20000 \begin{bmatrix} 4202.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4202.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4202.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4202.5 \end{bmatrix}$$

$$a_1[c] = 33.333 \begin{bmatrix} 16490.61 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16490.61 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16490.61 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8245.305 \end{bmatrix}$$

Maka didapat matriks kekakuan efektif;

$$[\hat{k}] = \begin{bmatrix} 84143000 & -44999.91 & 0 & 0 \\ -44999.91 & 84143000 & -23999.94 & 0 \\ 0 & -23999.94 & 84143000 & -20999.97 \\ 0 & 0 & -20999.97 & 84071000 \end{bmatrix} N/m$$

Pada langkah selanjutnya matriks kekakuan efektif akan diinverskan lagi agar nilai perpindahan sistem diperoleh.

4. Perhitungan terhadap respon dinamik sistem dilanjutkan ke tiap-tiap *time step*, dimulai dari menghitung nilai efektif fungsi dari beban yang diterima oleh sistem $F_{(t)}$ dengan Persamaan 6.5

$$\begin{aligned} \{\hat{F}\}_{t+\Delta t} &= \{\hat{F}\}_{t+\Delta t} + [m](a_0\{x\}_t + a_2\{\dot{x}\}_t + a_3\{\ddot{x}\}_t) \\ &\quad + [c](a_1\{x\}_t + a_4\{\dot{x}\}_t + a_5\{\ddot{x}\}_t) \end{aligned}$$

Dimana

$$\{\hat{F}\}_{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} 513.099 \\ 513.099 \\ 513.099 \\ 513.099 \end{bmatrix} N$$

Dengan nilai $\{x\}_t$, $\{\dot{x}\}_t$ dan $\{\ddot{x}\}_t$ adalah 0, maka nilai $[m](a_0\{x\}_t + a_2\{\dot{x}\}_t + a_3\{\ddot{x}\}_t)$ juga sama dengan 0. Begitu pula dengan nilai $[c](a_1\{x\}_t + a_4\{\dot{x}\}_t + a_5\{\ddot{x}\}_t)$ yang bernilai 0, maka nilai gaya efektif yang diterima sistem saat *time step* $0 + 0.01$ adalah sebesar

$$\{\hat{F}\}_{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} 513.099 \\ 513.099 \\ 513.099 \\ 513.099 \end{bmatrix} N$$

5. Menghitung besar perpindahan pada saat *time step* $0+0.01$

$$\{x\}_{t+\Delta t} = [\hat{k}]^{-1}\{\hat{F}\}_{t+\Delta t}$$

$$\{x\}_{t+\Delta t}$$

$$= \begin{bmatrix} 84143000 & -44999.91 & 0 & 0 \\ -44999.91 & 84143000 & -23999.94 & 0 \\ 0 & -23999.94 & 84143000 & -20999.97 \\ 0 & 0 & -20999.97 & 84071000 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 9604 \\ 9604 \\ 9604 \\ 9604 \end{bmatrix}$$

$$\{x\}_{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} 0.0000061 \\ 0.0000061 \\ 0.0000061 \\ 0.0000061 \end{bmatrix} m$$

6. Menghitung besar percepatan pada saat *time step* $0+0.01$

$$\{\ddot{x}\}_{t+\Delta t} = a_0(\{x\}_{t+\Delta t} - \{x\}_t) - a_2\{\dot{x}\}_t - a_3\{\ddot{x}\}_t$$

$$\{\ddot{x}\}_{t+\Delta t} = 20000 \left(\begin{bmatrix} 0.0000061 \\ 0.0000061 \\ 0.0000061 \\ 0.0000061 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) - 200 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\{\ddot{x}\}_{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} 0.122 \\ 0.122 \\ 0.122 \\ 0.122 \end{bmatrix} m/dt^2$$

7. Menghitung besar kecepatan pada saat *time step* $0+0.01$

$$\{\dot{x}\}_{t+\Delta t} = \{\dot{x}\}_t + a_6\{\dot{x}\}_t + a_3\{\ddot{x}\}_{t+\Delta t}$$

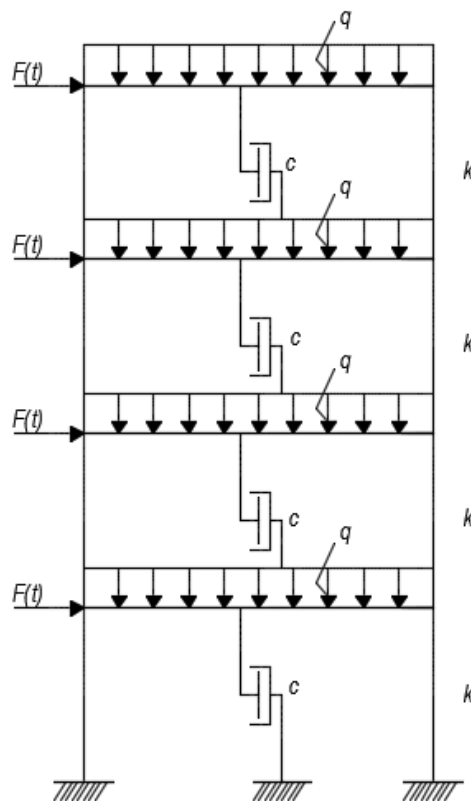
$$\{\dot{x}\}_{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.00833 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0.122 \\ 0.122 \\ 0.122 \\ 0.122 \end{bmatrix}$$

$$\{\dot{x}\}_{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} m/dt$$

8. Langkah perhitungan dilanjutkan ke *time step* selanjutnya hingga total waktu tercapai.

Contoh 6.2

Diketahui data sistem MDOF yang akan dianalisis memiliki variasi derajat kebebasan (*degree of freedom*) sebanyak 4 DOF, 6 DOF dan 8 DOF. Detail salah satu data sistem 4 DOF seperti terlihat pada gambar di bawah ini.



Berdasarkan data material dan dimensi dari sistem MDOF, maka dapat dihitung data-data karakteristik sistem seperti massa dan kekakuan. Nilai redaman yang digunakan sesuai dengan nilai redaman struktural material beton yaitu 5% . Massa sistem dihitung dengan mengalikan beban lantai perluasan sebesar 250 kg/m² yang sesuai dengan fungsi bangunan gedung yakni asrama dalam PPIUG (1983).

Perhitungan Massa sistem (m),

$$m = q \times \text{lebar segmen}$$

$$m = 250 \text{ kg/m}^2 \times 4.1 \text{ m}$$

$$m = 1025 \text{ kg/m} \times 4.1 \text{ m}$$

$$m = 4202.5 \text{ kg}$$

Berat sistem (W),

$$W = m \times g$$

$$W = 1025 \text{ kg/m} \times 9.81 \text{ m/dt}^2$$

$$W = 10055 \text{ N/m} \times 4.1 \text{ m}$$

$$W = 10055 \text{ N/m} \times 4.1 \text{ m}$$

Perhitungan kekakuan sistem dengan menggunakan persamaan berikut:

$$k = \frac{12EI}{h^3}$$

Inersia kolom ($b = 30 \text{ cm}$; $h = 40 \text{ cm}$) (I),

$$I = \frac{1}{12} \times bh^3$$

$$I = \frac{1}{12} \times (300 \text{ mm})(400 \text{ mm})^3$$

$$I = 1.6 \times 10^9 \text{ mm}$$

Maka,

$$k = \frac{12EI}{L^3}$$

$$k = \frac{12(25332,08)(1.6 \times 10^9)}{3400^3}$$

$$k = 12374.72 \text{ N/m} \approx 12374718.5 \text{ N/m}$$

Berdasarkan nilai kekakuan dan massa yang telah ditetapkan sebagai acuan, sistem divariasikan lagi menjadi 3 variasi berbeda yang akan dianalisis, secara detail variasi sistem dapat dilihat pada Tabel 6.1.

Data beban dinamik yang digunakan berbeda-beda tergantung dari tipe beban. Nilai gaya yang diberikan (F_0) akan berubah terhadap waktu sesuai dengan fungsi masing-masing beban. Namun secara keseluruhan nilai (F_0) yang digunakan pada beban sinusoidal, segitiga, segiempat dan *ramp* adalah massa mesin sebesar 1000 kg. Tentukanlah respon dinamis sistem MDOF tersebut dengan metode Newmark- β .

Penyelesaian:

Model bangunan yang dihitung untuk mendapatkan nilai riwayat waktu dari perpindahan (x), kecepatan (\dot{x}) dan percepatan (\ddot{x}) menggunakan sistem dengan model derajat kebebasan 4 DOF. Model sistem diidealisasikan dalam bentuk portal dua dimensi seperti pada Gambar 6.2. Perhitungan dilakukan dengan bantuan *listing* program dari metode *Newmark* – β yang dibuat menggunakan aplikasi FORTRAN. Perhitungan dari respon sistem MDOF dilakukan terhadap beban dinamik terpola yaitu beban segitiga, beban trapesium dan beban *ramp* serta beban dinamik harmonik yaitu beban segitiga. Masing – masing pola beban akan dihitung dengan model nilai massa dan kekakuan untuk sistem dengan nilai redaman sebesar 5%.

Perhitungan nilai respon seluruh model sistem MDOF terhadap empat tipe pola beban menggunakan metode *Newmark* – β dengan prinsip percepatan linier. Parameter alpha (α) dan delta (δ) yang digunakan dalam perhitungan masing – masing memiliki nilai sebesar 1/2 dan 1/6. *Time step* yang digunakan dalam riwayat waktu perpindahan (x), kecepatan (\dot{x}) dan percepatan (\ddot{x}) adalah sebesar 0.01 detik dan waktu total selama 2 detik.

6.3.1. Beban Sinusoidal

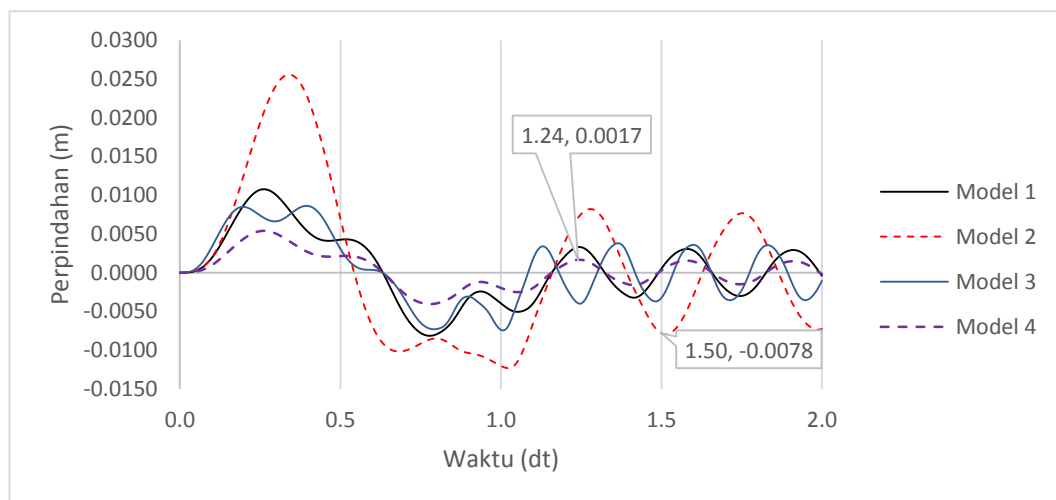
Analisis perhitungan program terhadap sistem yang diberi beban sinusoidal seperti pada Gambar 6.6 dilakukan selama 2 detik dengan *time step* sebesar 0.01 detik. Fungsi beban sinusoidal yang digunakan pada Gambar 6.2 dapat dijabarkan dengan persamaan $F(t)$ di bawah ini dengan nilai F_0 sebesar 1000 kg dan nilai Ω adalah $\pi/0.6$. Nilai F_0 dan durasi beban sinusoidal yang digunakan pada masing – masing sistem dengan 4 model tidak berbeda.

$$F(t) = F_0 \sin \Omega t$$

Sistem Model 4 DOF

a. Perpindahan

Respon sistem berderajat kebebasan 4 DOF teredam (*damped*) dengan beban sinusoidal secara singkat dapat dilihat pada grafik yang terdapat gambar di bawah ini. Terdapat 4 model sistem yang diberikan beban dinamik dengan fungsi sinusoidal, dari seluruh sistem tersebut nilai perpindahan maksimum tertinggi dihasilkan oleh sistem 4 DOF model 2 sebesar 0.0078 m pada waktu 1.50 detik dengan nilai massa dan redaman tetap seperti acuan dan nilai kekakuan setengah dari acuan.

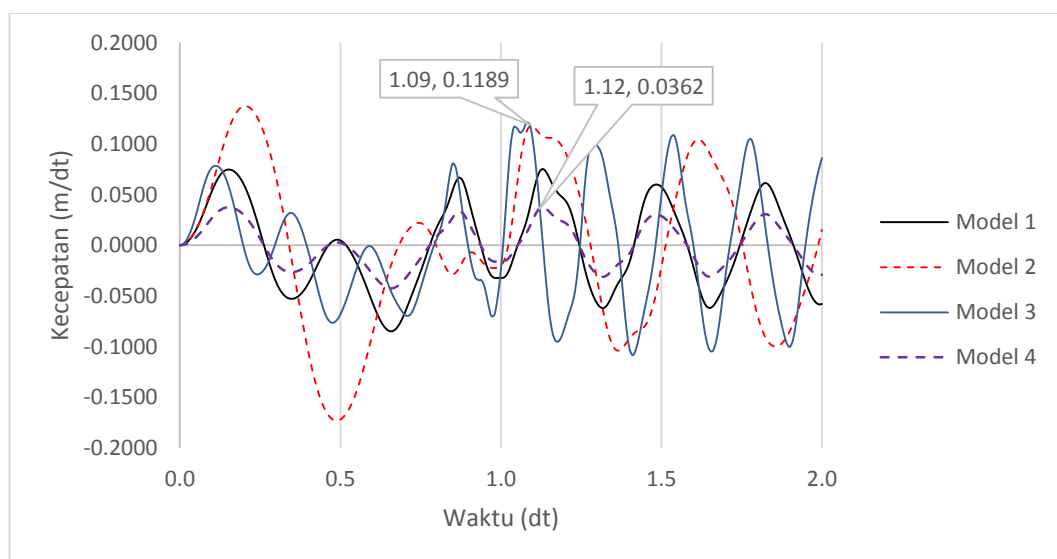


Sedangkan model 4 dimana nilai massa dan kekakuan ditingkatkan menjadi dua kali acuan, menghasilkan perpindahan maksimum terendah pada waktu 1.50 detik sebesar 0.0017 m. Pemberian beban sinusoidal pada 4 model sistem dengan redaman memperlihatkan bahwa nilai kekakuan merupakan parameter yang paling

berpengaruh terhadap tinggi maupun rendahnya nilai perpindahan yang dihasilkan. Hal ini dapat dilihat dari perpindahan sistem pada model 2 dimana nilai kekakuan diubah menjadi setengah dari acuan, perpindahan maksimum yang dihasilkan sangat tinggi. Namun pada model 3 dimana nilai massa setengah dari acuan dan nilai kekakuan tetap, nilai perpindahan maksimum yang dihasilkan bahkan tidak lebih tinggi dari model 1 yang merupakan acuan. Sistem 4 DOF model 4 dimana nilai kekakuan dan massa meningkat sebesar dua kali nilai acuan memperjelas bahwa tingginya nilai perpindahan berbanding terbalik dengan besarnya nilai kekakuan sistem.

b. Kecepatan

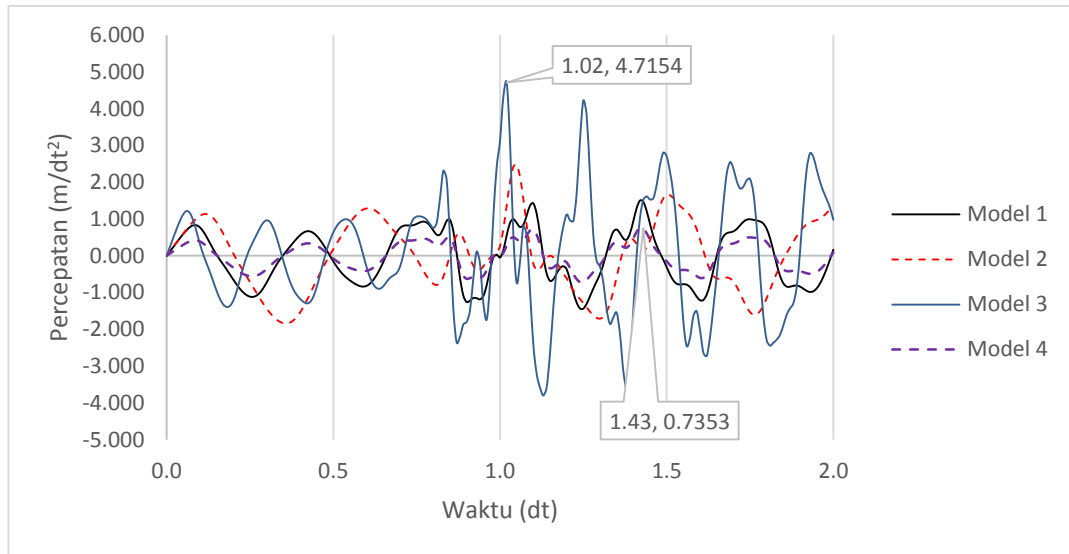
Sistem berderajat 4 DOF model 2 menghasilkan kecepatan maksimum tertinggi pada waktu 1.09 detik dengan nilai 0.1189 m/dt seperti yang dapat dilihat pada gambar di bawah ini. Model 4 menghasilkan kecepatan maksimum terendah pada waktu 1.12 detik dengan nilai 0.0362 m/dt.



Parameter sistem teredam yang memiliki pengaruh cukup signifikan terhadap nilai kecepatan adalah kekakuan sistem. Sesuai dengan hasil yang dapat dilihat pada gambar di atas, dimana apabila nilai kekakuan tetap sama seperti acuan pada model 1 dan 3 walaupun nilai massa berubah, maka nilai kecepatan yang dihasilkan tidak jauh berbeda. Sedangkan model 2 dimana nilai kekakuan setengah dari acuan, nilai kecepatan maksimum yang dihasilkan memiliki interval yang sangat besar. Hal ini berarti dalam sistem teredam berderajat kebebasan 4 DOF dengan variasi nilai massa dan kekakuan, nilai kecepatan sangat dipengaruhi oleh nilai kekakuan dari sistem tersebut.

c. Percepatan

Sistem teredam 4 DOF model 3 dengan massa 2101.25 kg dan kekakuan 12374718.5 N/m menghasilkan nilai percepatan maksimum tertinggi diantara model sistem lainnya. Seperti yang dapat dilihat pada di bawah ini, sistem 4 DOF model 3 percepatan mencapai nilai maksimum sebesar 4.7200 m/dt² pada waktu 1.0200 detik.



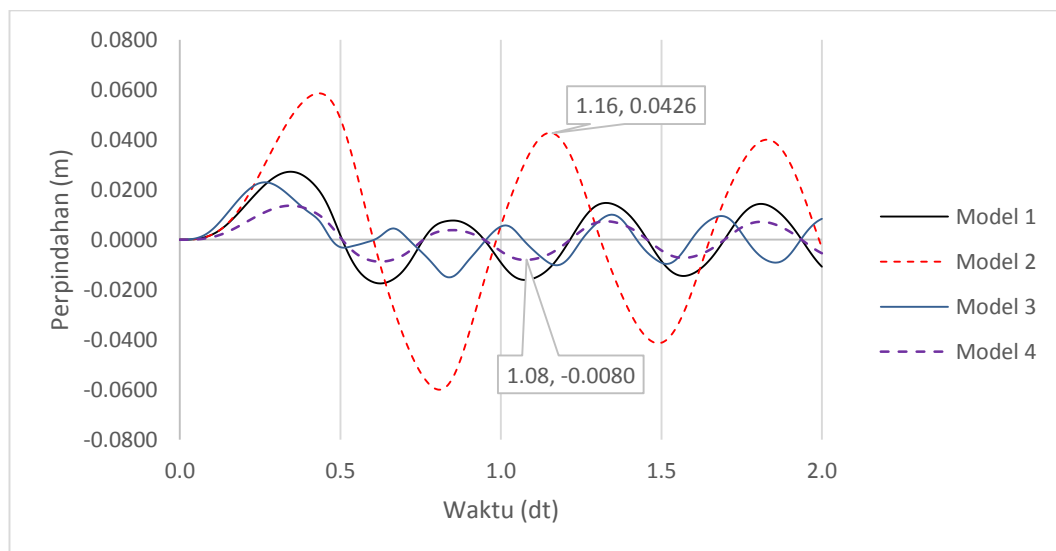
Sedangkan nilai percepatan maksimum terendah sebesar 0.735 m/dt^2 pada waktu 1.4300 detik dihasilkan dari sistem 4 DOF model 4 dimana nilai massa dan kekakuan sebesar dua kali acuan. Pengaruh signifikan nilai massa terhadap percepatan sistem dengan redaman juga dapat dilihat pada grafik riwayat waktu sistem 4 DOF model 1 dan 2.

Model 1 dan 2 dimana nilai massa yang digunakan sama yaitu sebesar 4202.5 kg, walaupun pada model 2 nilai kekakuan setengah dari acuan, tetapi selisih nilai percepatan yang dihasilkan tidak besar apabila dibandingkan dengan percepatan pada sistem 4 DOF model 3. Berdasarkan hal tersebut dapat disimpulkan secara singkat bahwa pada sistem 4 DOF teredam karakteristik yang paling mempengaruhi tinggi maupun rendahnya nilai percepatan adalah massa dari sistem itu sendiri.

Sistem 6 DOF

a. Perpindahan

Nilai perpindahan maksimum dari sistem 6 DOF teredam paling tinggi dihasilkan dari grafik model 2 yang dapat dilihat pada gambar di bawah ini, dimana perpindahan mencapai nilai 0.0426 m pada waktu 1.16 detik. Sedangkan nilai perpindahan maksimum sistem 6 DOF model 4 merupakan yang terendah. Berdasarkan Gambar 4.6 dapat dilihat bahwa perpindahan yang dihasilkan model 4 memiliki nilai 0.0080 m pada waktu 1.08 detik. Sedangkan model 1 dan 3 dimana nilai kekakuan yang digunakan merupakan kekakuan acuan, selisih nilai perpindahan yang dihasilkan tidak jauh berbeda.

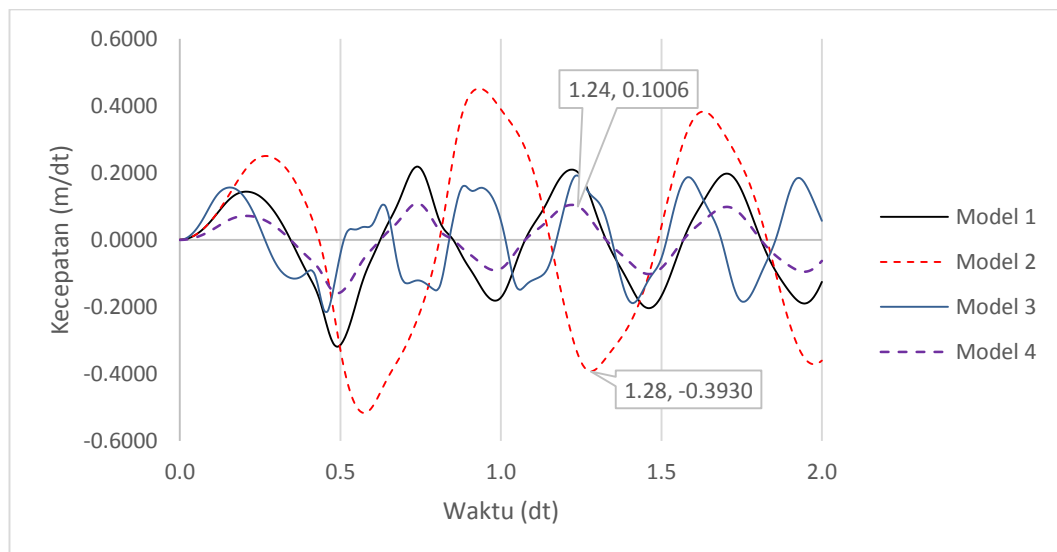


Hal ini berarti pada sistem 6 DOF dengan redaman sebesar 5%, parameter sistem yang paling mempengaruhi tinggi maupun rendahnya nilai perpindahan merupakan kekakuan dari sistem. Hasil analisis terhadap sistem 6 DOF tidak berbeda dengan sistem 4 DOF, yaitu semakin besar nilai kekakuan maka perpindahan akan semakin kecil begitu pula sebaliknya. Hanya saja pada sistem 6 DOF nilai perpindahan maksimum pada tiap-tiap model yang digunakan memiliki

nilai lebih tinggi apabila dibandingkan dengan nilai perpindahan maksimum sistem 4 DOF.

b. Kecepatan

Sistem 6 DOF model 2 menghasilkan nilai kecepatan maksimum tertinggi yaitu 0.3930 m/dt pada waktu 1.28 detik. Model 2 ini menggunakan nilai massa sama dengan acuan dan nilai kekakuan setengah dari acuan. Sedangkan model 4 menghasilkan nilai kecepatan maksimum terendah pada waktu 1.24 detik sebesar 0.1006 m/dt. Berdasarkan grafik pada gambar di bawah ini, dapat dilihat bahwa sistem 6 DOF model 1 dan 3 memiliki selisih yang tidak terlalu jauh.

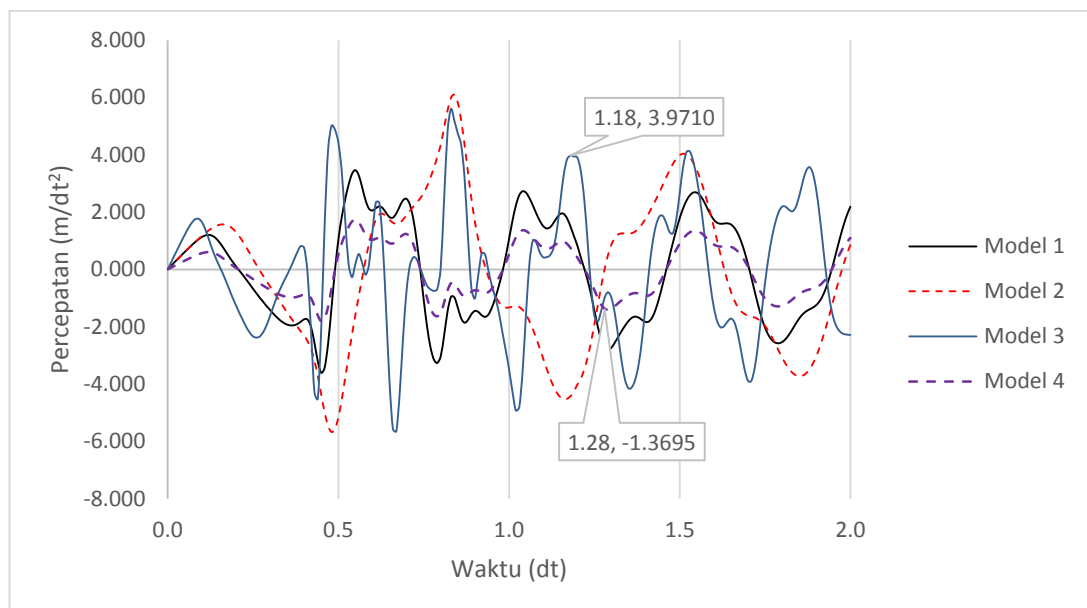


Hal ini berarti, pada sistem 6 DOF dengan redaman 5% parameter yang memiliki pengaruh paling signifikan dalam *output* berupa kecepatan merupakan kekakuan dari sistem. Hasil tersebut tidak berbeda dengan sistem 4 DOF dimana tinggi kecepatan dipengaruhi oleh besarnya nilai kekakuan dari sistem, namun nilai

kecepatan maksimum yang dihasilkan sistem 6 DOF pada masing-masing model lebih besar apabila dibandingkan dengan sistem 4 DOF.

c. Percepatan

Sistem 6 DOF yang menghasilkan nilai percepatan maksimum tertinggi merupakan model 2 dimana massa sesuai acuan dan kekakuan setengah dari acuan apabila dilihat dari grafik pada gambar di bawah ini. Nilai percepatan pada model ini mencapai 3.9710 m/dt^2 pada waktu 1.18 detik. Sedangkan nilai percepatan maksimum terendah yaitu 1.3695 m/dt^2 pada waktu 1.28 detik merupakan hasil dari perhitungan sistem 6 DOF model 4 dimana nilai kekakuan dan massa dua kali acuan.



Hasil pada sistem 6 DOF model 4 menunjukkan bahwa apabila massa dari sistem ditingkatkan maka nilai percepatan akan semakin rendah. Namun percepatan maksimum sesuai Gambar 4.8 justru diperoleh pada model 2 dimana nilai massa sesuai dengan acuan dan nilai kekakuan setengah dari acuan. Hal ini sedikit berbeda

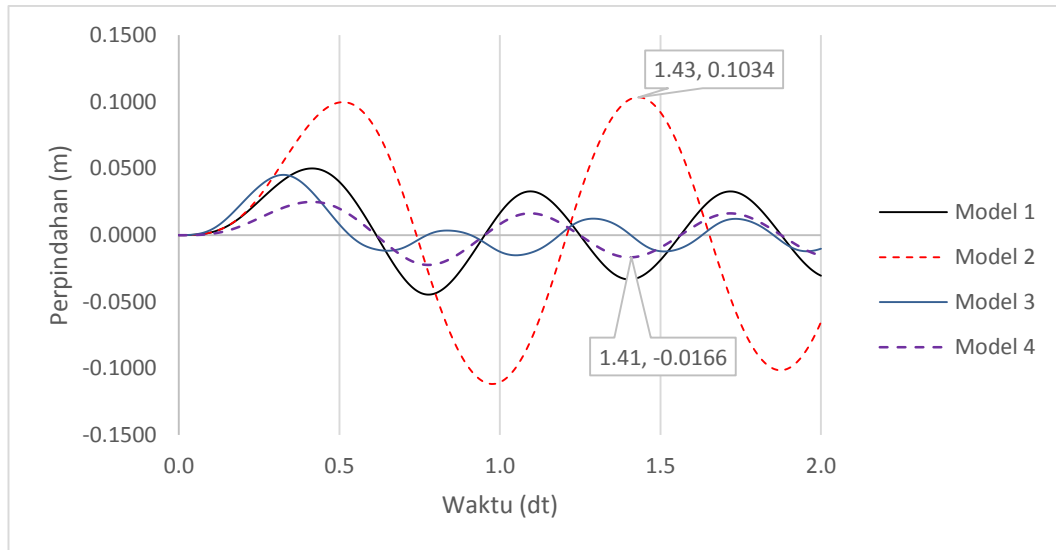
dengan hasil pada sistem 4 DOF dimana percepatan maksimum tertinggi dihasilkan dari model 3 dengan besar massa setengah dari acuan.

Sehingga dapat disimpulkan bahwa parameter sistem yang paling berpengaruh terhadap tinggi atau rendahnya percepatan adalah massa sistem. Apabila grafik pada gambar di atas diamati, maka dapat dilihat bahwa puncak nilai percepatan sistem 6 DOF model 2 dan 3 hampir berimpit, sehingga dapat diketahui bahwa walaupun terdapat perbedaan pada nilai percepatan maksimum, massa sistem merupakan parameter yang paling berpengaruh terhadap hasil akhir percepatan.

Sistem 8 DOF

a. Perpindahan

Perpindahan maksimum tertinggi pada sistem 8 DOF dari gambar di bawah ini dihasilkan oleh model 2 yaitu sebesar 0.1034 m pada waktu 1.43 detik. Sedangkan nilai terendah perpindahan maksimum dari sistem 8 DOF dengan redaman 5% dihasilkan dari model 4 pada waktu 1.41 detik sebesar 0.0166 m dimana nilai massa dan kekakuan sistem adalah sebesar dua kali acuan.

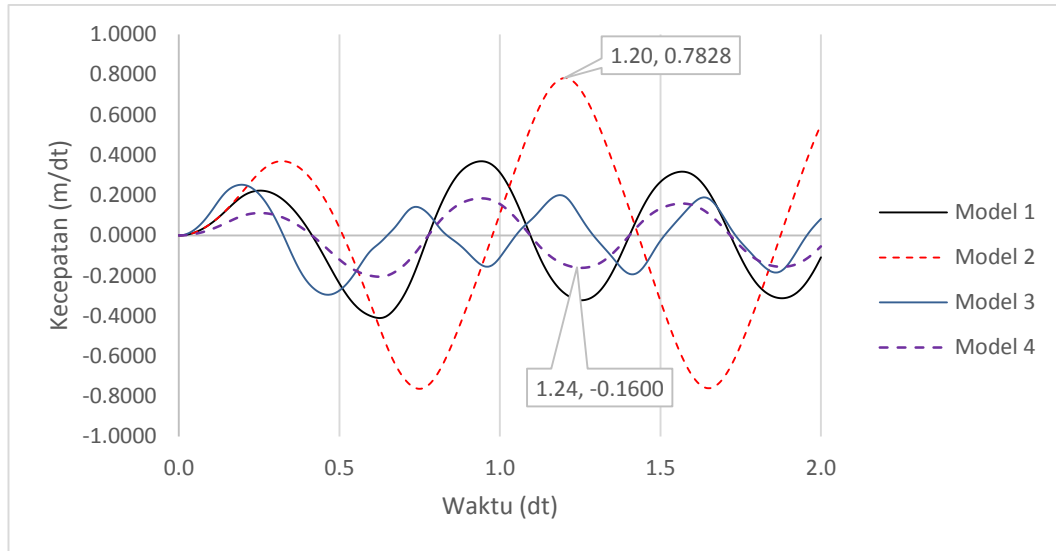


Berdasarkan analisis yang dilakukan terhadap grafik pada gambar di atas maka dapat diketahui bahwa pada sistem 8 DOF parameter yang paling mempengaruhi nilai perpindahan adalah kekakuan sistem. Hasil yang didapat pada sistem 8 DOF dimana parameter kekakuan merupakan parameter yang paling berpengaruh terhadap nilai perpindahan sistem tidak berbeda dengan hasil yang didapat pada sistem dengan 4 dan 6 DOF. Sehingga secara singkat dapat dilihat bahwa derajat kebebasan tidak berpengaruh terhadap berubahnya parameter yang menentukan nilai perpindahan sistem melainkan hanya pada nilai respon maksimum yang dihasilkan. Hal ini dikarenakan, perilaku respon yang dihasilkan sistem pada setiap DOF hampir sama.

b. Kecepatan

Berdasarkan di bawah ini, sistem 8 DOF mencapai kecepatan maksimum tertinggi pada model 2 dimana kecepatan memiliki nilai 0.7828 m/dt pada waktu 1.2 detik. Sedangkan kecepatan maksimum terendah terjadi pada model 4 dengan nilai

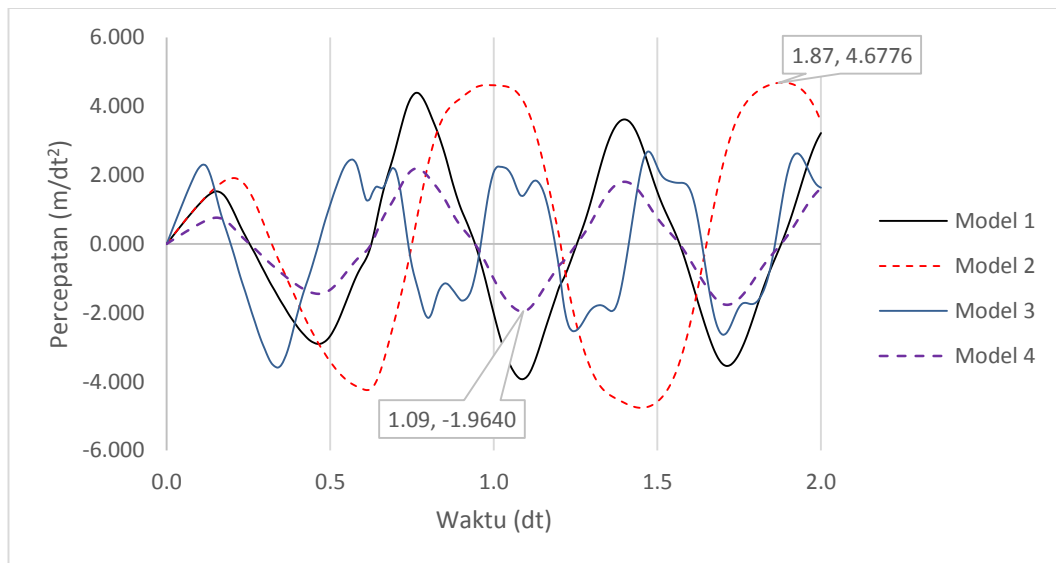
0.16 m/dt pada waktu 1.24 detik. Hal ini berarti pada sistem 8 DOF dengan nilai redaman 5% di setiap model, parameter sistem yang paling mempengaruhi merupakan kekakuan sistem.



Nilai kekakuan sistem pada model 2 hanya setengah dari acuan namun kecepatan yang dihasilkan memiliki nilai tertinggi diantara nilai kecepatan lainnya dari masing – masing sistem. Berbanding terbalik dengan sistem pada model 4 dimana nilai kekakuan 2 kali acuan dan nilai kecepatan yang didapat memiliki nilai terendah. Hasil yang didapat pada sistem 8 DOF dimana parameter kekakuan merupakan parameter yang paling berpengaruh terhadap nilai kecepatan sistem tidak berbeda dengan hasil yang didapat pada sistem dengan 4 dan 6 DOF. Hal ini berarti dalam analisis derajat kebebasan sistem tidak mempengaruhi perubahan tipe parameter yang berhubungan dengan nilai kecepatan. Hasil analisis yang didapat sama dengan respon sistem berupa perpindahan, yaitu derajat kebebasan tidak mempengaruhi hubungan respon dengan parameter.

c. Percepatan

Nilai percepatan maksimum yang dihasilkan dari perhitungan sistem 8 DOF dengan beban sinusoidal mencapai nilai tertinggi pada model 2. Gambar di bawah ini menunjukkan bahwa pada model 2 nilai percepatan mencapai 4.6776 m/dt^2 pada waktu 1.87 detik. Sedangkan nilai percepatan maksimum terendah dari perhitungan sistem 8 DOF terdapat pada model 4 dimana percepatan hanya 1.9640 m/dt^2 pada waktu 1.09 detik. Berdasarkan hasil hitungan secara analitis, parameter sistem yang paling berpengaruh terhadap nilai percepatan adalah kekakuan sistem. Hal ini sedikit berbeda dari sistem dengan derajat kebebasan 4 DOF dimana parameter yang paling berpengaruh adalah massa, sedangkan sistem dengan derajat kebebasan 6 DOF menunjukkan hasil parameter yang sama dengan sistem 8 DOF

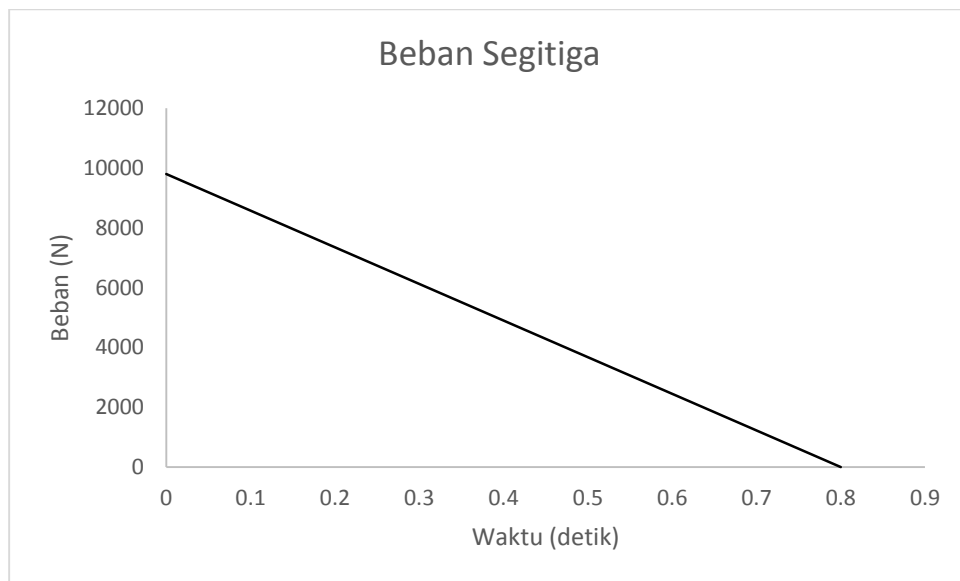


6.3.2. Beban Segitiga

Analisis perhitungan program terhadap sistem yang diberi beban segitiga seperti pada di bawah ini dilakukan selama 2 detik dengan *time step* sebesar 0.01 detik. Fungsi beban segitiga yang digunakan dapat dijabarkan dalam persamaan di

bawah dengan nilai F_0 sebesar 1000 kg dan durasi beban selama 0.5 detik. Nilai F_0 dan durasi beban sinusoidal yang digunakan pada masing-masing sistem dengan 4 model tidak berbeda.

$$F(t) = \begin{cases} F_0 \left(1 - \frac{t}{t_d}\right) & \text{untuk } 0 \leq t \leq t_d \\ 0 & \text{untuk } t > t_d \end{cases}$$

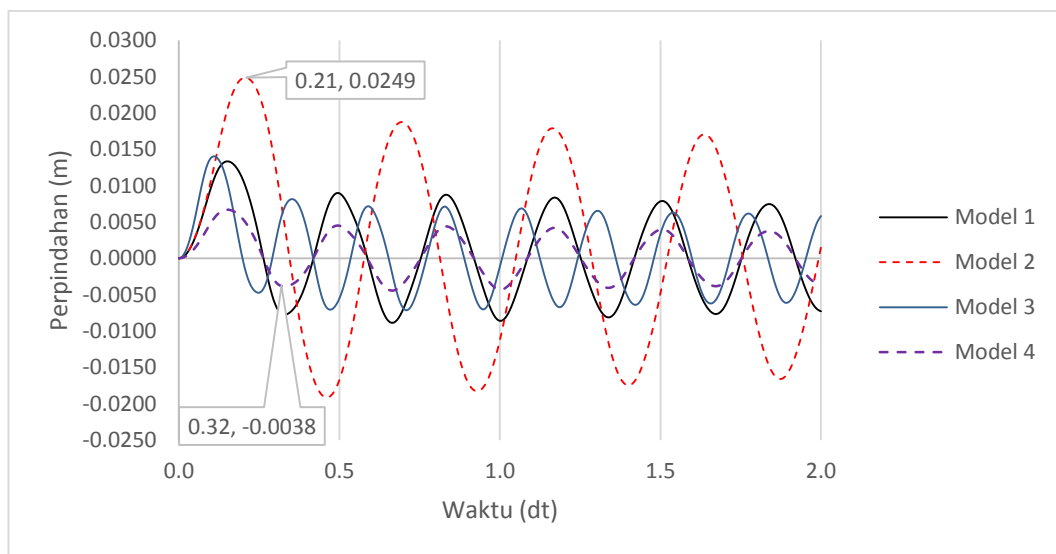


Sistem 4 DOF

a. Perpindahan

Berdasarkan di bawah ini, perpindahan maksimum tertinggi pada sistem 4 DOF akibat beban segitiga terjadi pada model 2 dimana kekakuan sistem setengah dari acuan, massa dan redaman tidak diubah. Sistem 4 DOF model 2 mencapai nilai perpindahan maksimum dengan nilai 0.0249 m pada waktu 0.21 detik. Sedangkan perpindahan maksimum terendah terjadi pada model 4 dimana massa dan kekakuan sistem menjadi dua kali acuan sedangkan redaman tetap 5%. Sistem dengan nilai

parameter menyesuaikan dengan model 4 mencapai perpindahan maksimum sebesar 0.0066 m pada waktu 0.14 detik. Hal ini berarti parameter yang mempengaruhi perpindahan sistem 4 DOF akibat adanya beban luar dengan pola segitiga adalah kekakuan sistem. Berdasarkan analisis yang dilakukan pada sistem 4, 6 dan 8 DOF akibat beban sinusoidal, parameter yang paling berpengaruh terhadap perpindahan sistem tetap sama walaupun sistem dibebani dengan beban yang berbeda.

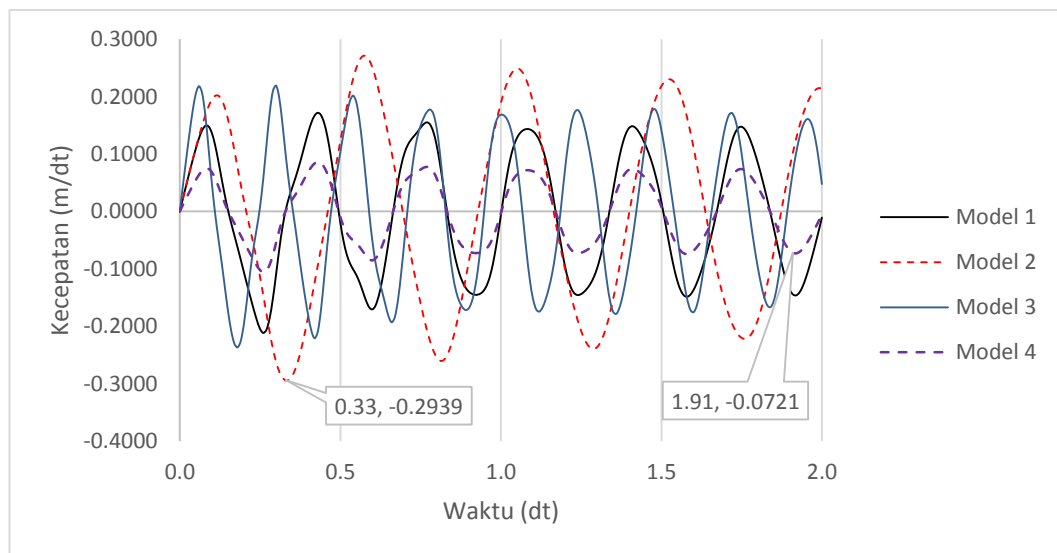


b. Kecepatan

Gambar di bawah ini memperlihatkan respon sistem 4 DOF yang diberi beban luar dengan pola segitiga pada 4 model yang telah ditentukan mencapai nilai kecepatan maksimum tertinggi pada model 2 dimana kecepatan sebesar 0.2939 m/dt pada waktu 0.33 detik. Sedangkan nilai kecepatan maksimum terendah sebesar 0.1021 m/dt pada waktu 0.25 detik terjadi pada model 4. Sesuai dengan data parameter sistem yang telah ditetapkan sebelumnya untuk tiap – tiap model, diketahui bahwa model 2 memiliki nilai massa sesuai dengan acuan dan nilai

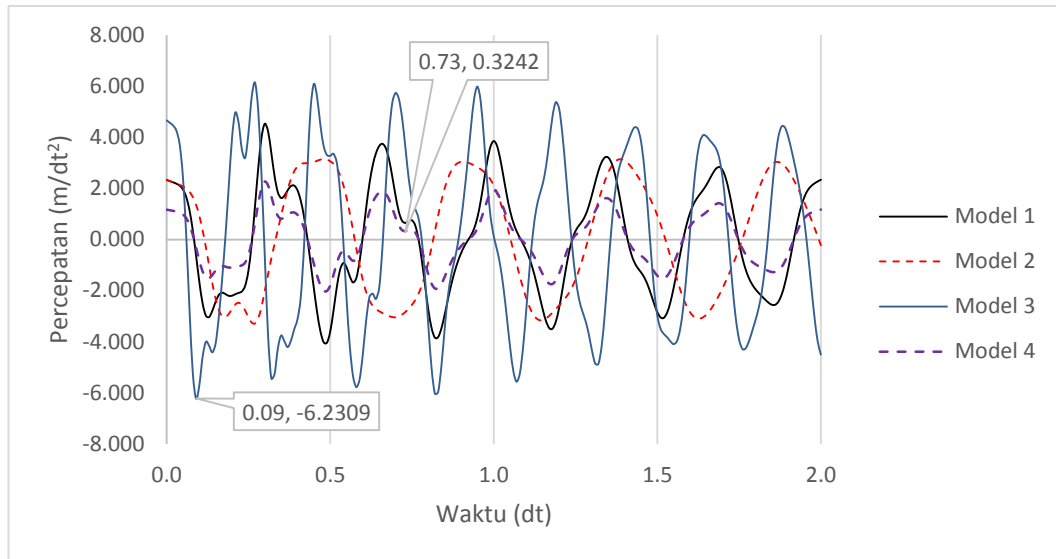
kekakuan setengah dari acuan, sedangkan model 4 memiliki nilai massa dan kekakuan dua kali acuan.

Berdasarkan data – data yang ada, maka dapat dilihat bahwa hasil perhitungan menunjukkan bahwa parameter yang paling berpengaruh terhadap kecepatan sistem 4 DOF dengan redaman sebesar 5% adalah kekakuan sistem. Hasil yang didapatkan tidak berbeda dari sistem 4 DOF yang diberi beban luar berupa beban sinusoidal, hal ini berarti tipe beban yang digunakan tidak merubah parameter sistem yang berpengaruh terhadap kecepatan.



c. Percepatan

Gambar di bawah ini memperlihatkan nilai percepatan maksimum tertinggi pada sistem 4 DOF dengan beban luar berpola segitiga terjadi pada model 3 pada waktu 0.09 detik sebesar 6.2309 m/dt^2 . Sedangkan nilai percepatan maksimum terendah terjadi pada model 4 sebesar 1.808 m/dt^2 pada waktu 0.5 detik.



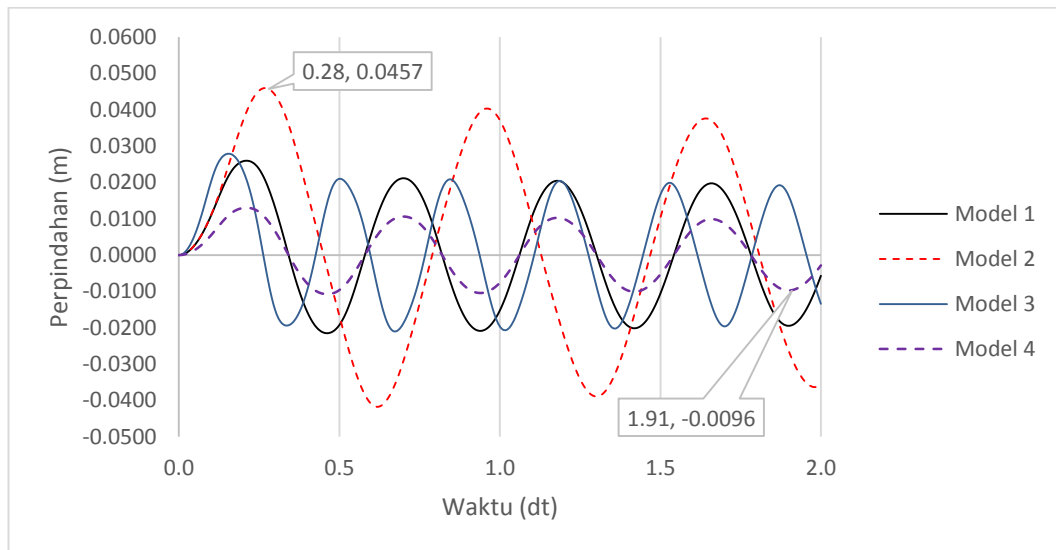
Sesuai dengan nilai parameter sistem yang digunakan, model 3 memiliki nilai massa setengah dari acuan dan kekakuan sama dengan acuan, model 4 memiliki nilai massa dan kekakuan dua kali dari acuan. Berdasarkan hal tersebut dapat diketahui bahwa pada sistem 4 DOF dengan nilai redaman tetap sebesar 5% dan diberi beban luar berpola segitiga, parameter sistem yang paling berpengaruh pada nilai percepatan adalah massa sistem. Hasil yang didapat tidak berbeda dengan sistem 4, 6 dan 8 DOF yang diberi beban luar berupa beban sinusoidal. Sehingga dapat diketahui bahwa berdasarkan data yang ada, tinggi atau rendahnya nilai percepatan tidak dipengaruhi oleh beban luar yang diberikan terhadap sistem, melainkan dipengaruhi oleh massa sistem itu sendiri.

Sistem 6 DOF

a. Perpindahan

Grafik pada gambar di bawah ini menampilkan riwayat waktu perpindahan sistem 6 DOF akibat beban luar dengan pola segitiga. Berdasarkan tersebut, dapat

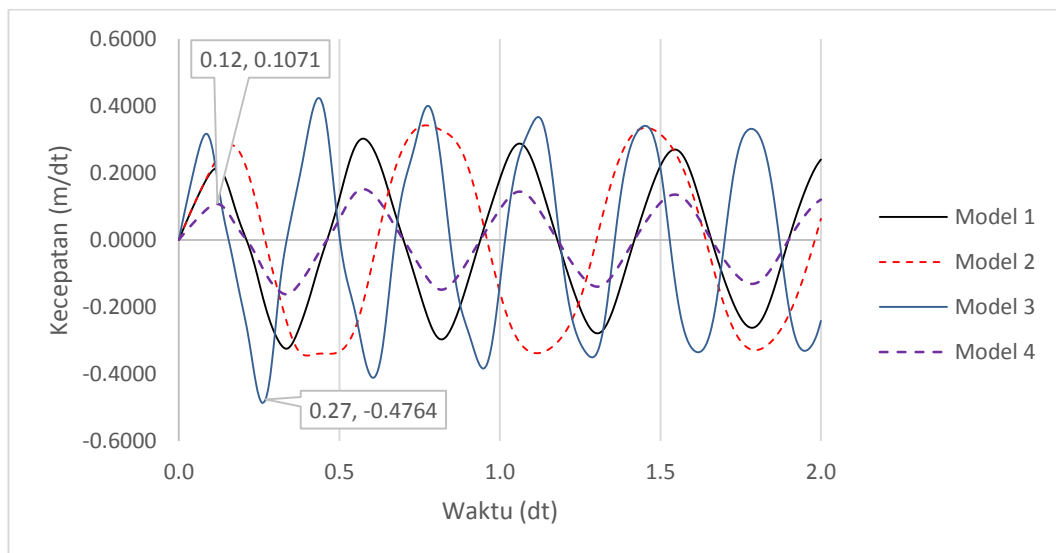
dilihat bahwa perpindahan maksimum tertinggi sistem 6 DOF terjadi pada model 2 dimana perpindahan mencapai 0.0457 m di waktu 0.28 detik. Model 4 menghasilkan nilai perpindahan maksimum terendah dimana perpindahan hanya mencapai 0.0129 m di waktu 0.22 detik.



Model 2 dan model 4 sendiri memiliki nilai parameter sistem yang berbeda, model 2 menggunakan nilai massa acuan dengan kekakuan setengah dari acuan sedangkan model 4 menggunakan nilai massa dan kekakuan dua kali acuan. Berdasarkan data parameter yang digunakan dan perpindahan yang dihasilkan masing – masing model sistem dapat dilihat bahwa parameter kekakuan menjadi yang paling berpengaruh terhadap nilai perpindahan suatu sistem. Hasil ini tidak berbeda dari sistem 4 DOF yang diberi beban segitiga maupun sistem 4, 6 dan 8 DOF yang diberi beban sinusoidal.

b. Kecepatan

Hasil perhitungan riwayat waktu kecepatan 4 model dari sistem 6 DOF dapat dilihat pada gambar di bawah ini. Model 3 dimana nilai massa setengah dari acuan dan nilai kekakuan tetap, menghasilkan nilai kecepatan tertinggi mencapai 0.476 m/dt pada waktu 0.27 detik. Model 4 dimana nilai massa dan kekakuan dua kali acuan menghasilkan nilai kecepatan terendah dimana hanya 0.157 m/dt pada waktu 0.35 detik.

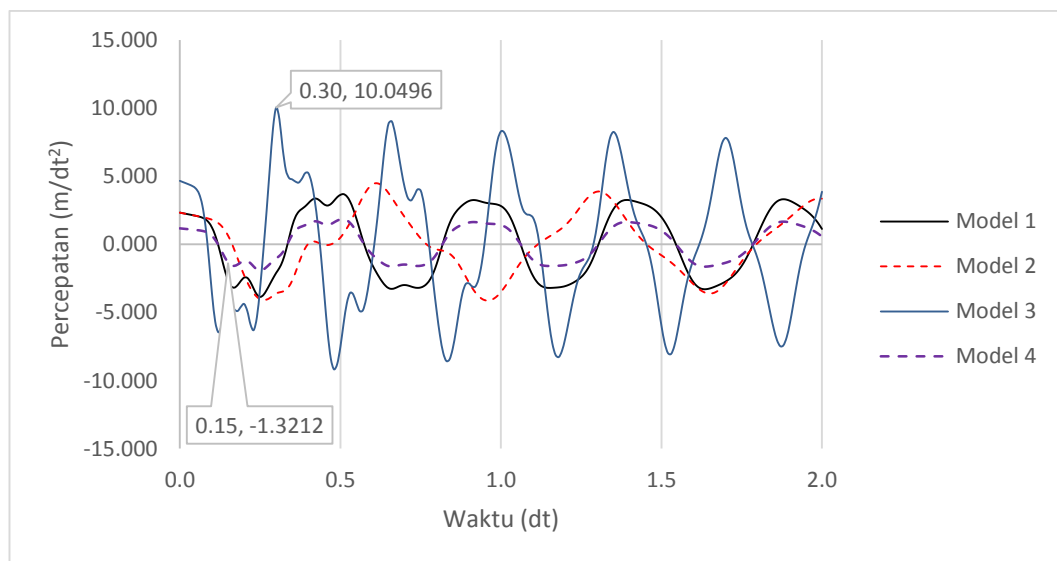


Berdasarkan data parameter dan masing – masing nilai kecepatan, dapat dilihat bahwa pada sistem 6 DOF dengan redaman sebesar 5% yang dengan beban luar pola segitiga, parameter yang mempengaruhi nilai kecepatan adalah massa dari sistem. Hal ini dikarenakan model 3 memiliki nilai kekakuan yang sama dengan model 1, hanya nilai massa setengah dari acuan namun dapat menghasilkan nilai kecepatan maksimum tertinggi diantara 3 model lainnya. Hasil yang didapat berbeda dari sistem 4 DOF dengan beban segitiga dan sistem 4, 6 dan 8 DOF dengan beban

sinusoidal dimana parameter kekakuan merupakan yang paling berpengaruh terhadap nilai kecepatan suatu sistem tanpa adanya model pada nilai persentase redaman.

c. Percepatan

Nilai percepatan maksimum tertinggi yang dihasilkan sistem 6 DOF dengan beban luar berpola segitiga adalah sistem dengan parameter pada model 3. Berdasarkan grafik riwayat waktu percepatan pada gambar di bawah ini, dapat dilihat bahwa nilai percepatan model 3 mencapai 10 m/dt^2 pada waktu 0.3 detik. Berbanding terbalik dengan model 3, model 4 menghasilkan nilai percepatan maksimum terendah dimana hanya 1.93 m/dt^2 pada waktu 0.25 detik.



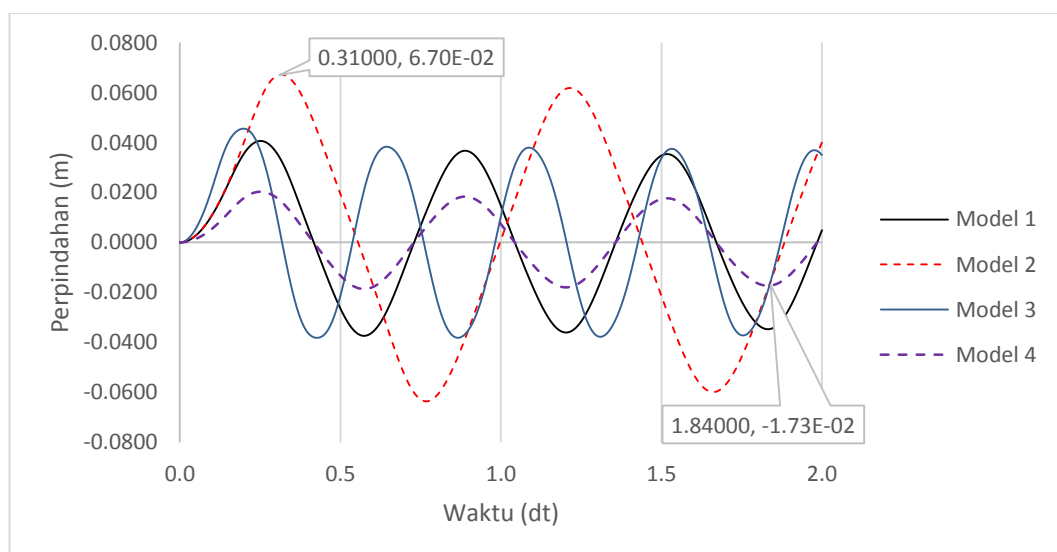
Data nilai percepatan yang dihasilkan tiap model sistem berbeda walaupun nilai dan durasi beban luar yang digunakan sama. Apabila data model parameter sistem 6 DOF dengan beban segitiga dihubungkan terhadap nilai percepatan yang

dihasilkan, maka dapat dilihat bahwa parameter massa memiliki pengaruh paling signifikan terhadap percepatan sistem. Hasil yang didapat tidak berbeda dari sistem 4 DOF dengan beban segitiga maupun sistem 4, 6 dan 8 DOF dengan beban luar berupa beban sinusoidal, masing – masing sistem menggunakan parameter nilai model yang sama terhadap massa dan kekakuan namun tidak terhadap persentase redaman struktural.

Sistem 8 DOF

a. Perpindahan

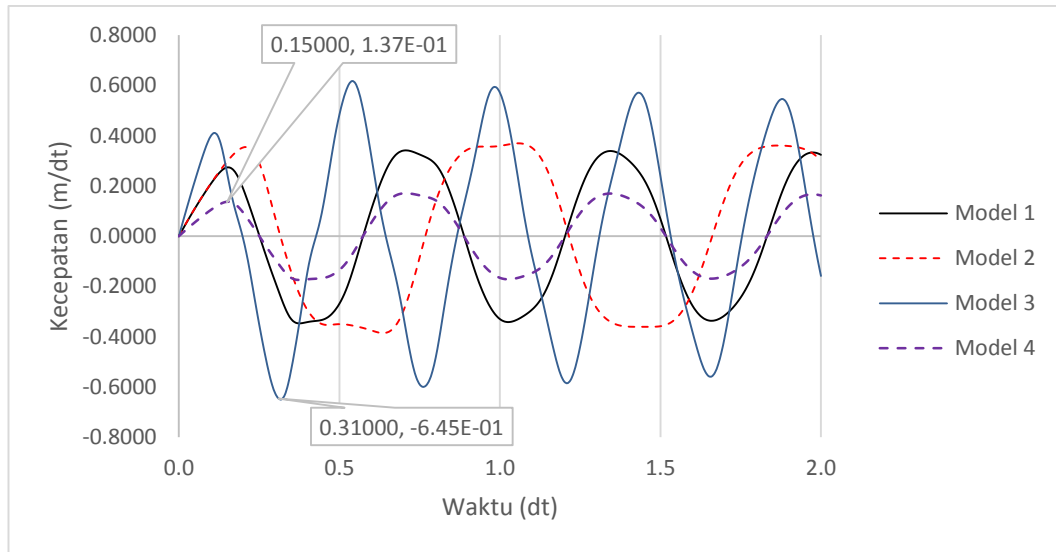
Grafik riwayat waktu perpindahan sistem 8 DOF akibat adanya beban dinamik berpola segitiga dapat dilihat pada gambar di bawah ini. Sistem 8 DOF model 2 menghasilkan nilai perpindahan maksimum tertinggi yaitu 0.067 m pada waktu 0.31 detik. Berbeda dengan model 2, model 4 menghasilkan nilai perpindahan maksimum terendah yaitu 0.0185 m pada waktu 0.56 detik.



Model 2 dan 4 memiliki perbedaan dari nilai parameter yang digunakan, pada model 2 nilai massa yang digunakan adalah massa acuan sedangkan kekakuan setengah dari acuan, pada model 4 nilai massa dan kekakuan yang digunakan dua kali acuan. Berdasarkan beda nilai perpindahan yang dihasilkan serta nilai perpindahan model 1 dan 3 dimana kekakuan sama dengan acuan yang tidak terpaut jauh, dapat diketahui bahwa pada sistem 8 DOF parameter yang paling berpengaruh terhadap nilai perpindahan adalah kekakuan sistem. Hasil ini tidak berbeda dengan sistem 4 dan 6 DOF yang dibebani pola segitiga serta sistem 4, 6 dan 8 DOF yang dibebani beban sinusoidal.

b. Kecepatan

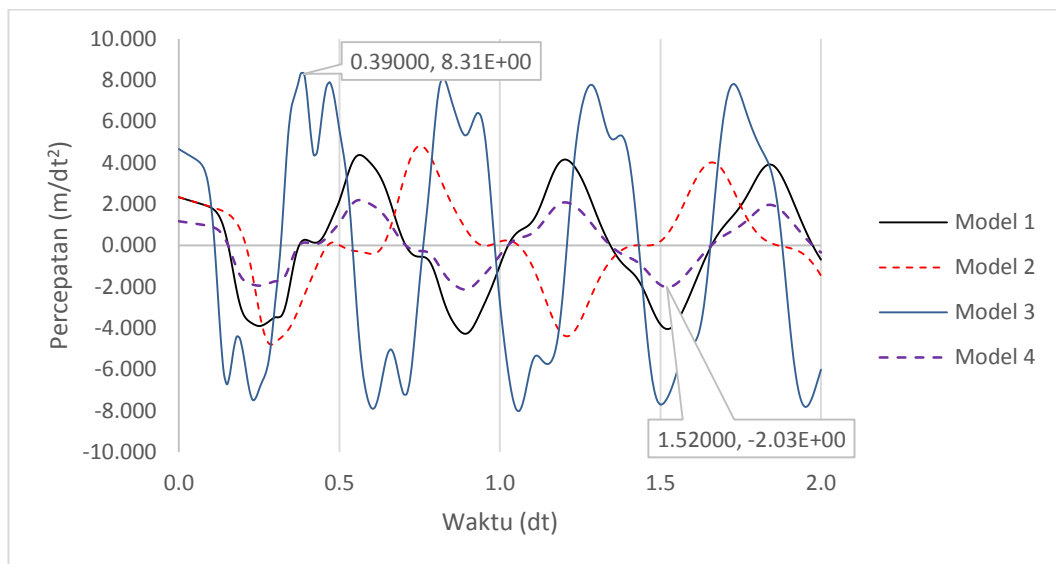
Sistem 8 DOF dengan beban segitiga menghasilkan nilai kecepatan dari 4 model parameter seperti yang dapat dilihat pada gambar di bawah ini. Nilai kecepatan maksimum tertinggi dihasilkan oleh sistem 8 DOF model 3 yaitu 0.645 m/dt pada waktu 0.31 detik. Sedangkan nilai kecepatan maksimum terendah dihasilkan oleh sistem 8 DOF model 4 yaitu 0.171 m/dt pada waktu 0.4 detik. Model 1 dan 2 menghasilkan nilai kecepatan yang tidak jauh berbeda.



Apabila dilihat hubungan antara nilai parameter masing – masing model sistem dengan perpindahan yang dihasilkan, maka dapat diketahui bahwa parameter yang paling berpengaruh terhadap nilai kecepatan adalah massa sistem. Hal tersebut dikarenakan pada model 3, massa yang digunakan adalah setengah dari acuan serta nilai kekakuan sama dengan acuan, pada model 4 massa dan kekakuan yang digunakan dua kali acuan. Sedangkan model 1 dan 2 memiliki nilai massa yang sama dengan acuan, dan dapat dilihat bahwa nilai perpindahan tidak jauh berbeda. Hasil ini sama seperti sistem 6 DOF dengan beban segitiga dimana parameter paling berpengaruh adalah massa, namun berbeda dari sistem 4 DOF dengan beban segitiga serta sistem 4, 6 dan 8 DOF dengan beban sinusoidal dimana parameter paling berpengaruh adalah kekakuan.

c. Percepatan

Nilai percepatan maksimum dari sistem 6 DOF teredam paling tinggi dihasilkan dari grafik model 3 yang dapat dilihat pada gambar di bawah ini, dimana percepatan mencapai nilai 8.31 m/dt^2 pada waktu 0.39 detik. Sedangkan nilai percepatan maksimum sistem 8 DOF model 4 merupakan yang terendah dimana dari gambar di bawah ini dapat dilihat bahwa percepatan yang dihasilkan model 4 memiliki nilai 2.03 m/dt^2 pada waktu 1.52 detik.



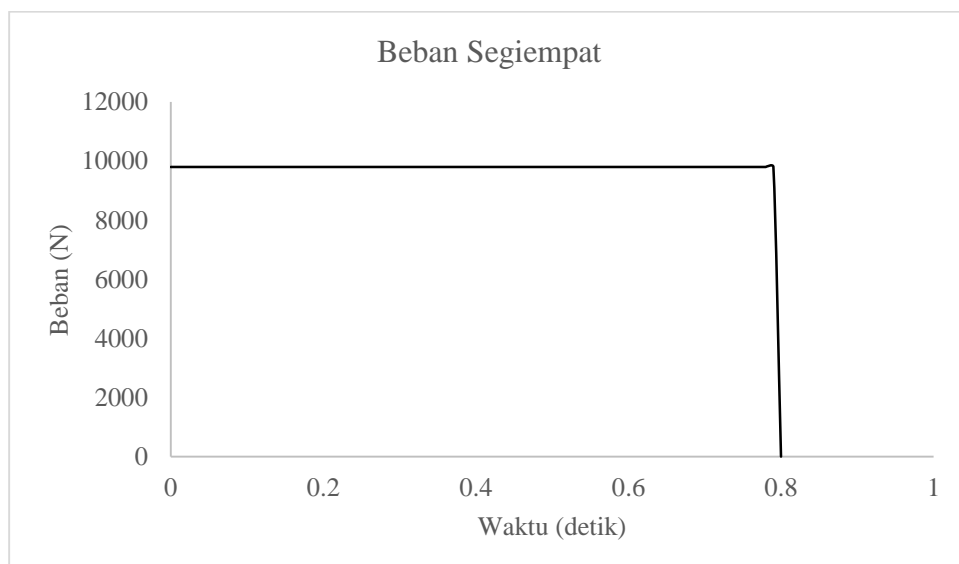
Apabila respon percepatan sistem model 1 dan 2 diperhatikan, maka dapat dilihat bahwa nilai massa yang digunakan merupakan massa acuan, namun selisih nilai percepatan yang dihasilkan tidak jauh berbeda. Hal ini berarti pada sistem 8 DOF dengan redaman sebesar 5%, parameter sistem yang paling mempengaruhi tinggi maupun rendahnya nilai percepatan merupakan massa dari sistem. Hasil analisis terhadap sistem 8 DOF tidak berbeda dari sistem 4 dan 6 DOF yang diberi beban luar segitiga serta sistem 4, 6 dan 8 DOF yang diberi beban sinusoidal yaitu

semakin besar nilai massa maka percepatan akan semakin kecil begitu pula sebaliknya. Hanya saja pada sistem 8 DOF nilai perpindahan maksimum yang dihasilkan lebih tinggi apabila dibandingkan dengan nilai perpindahan sistem 4 dan 6 DOF.

6.3.3. Beban Segiempat

Analisis perhitungan program terhadap sistem yang diberi beban segiempat seperti pada gambar di bawah ini, dilakukan selama 2 detik dengan *time step* sebesar 0.01 detik. Fungsi beban segitiga yang digunakan pada gambar tersebut dapat dijabarkan dalam persamaan di bawah ini dengan nilai F_0 sebesar 1000 kg dan durasi beban selama 0.8 detik. Nilai F_0 dan durasi beban sinusoidal yang digunakan pada masing – masing sistem dengan 4 model tidak berbeda.

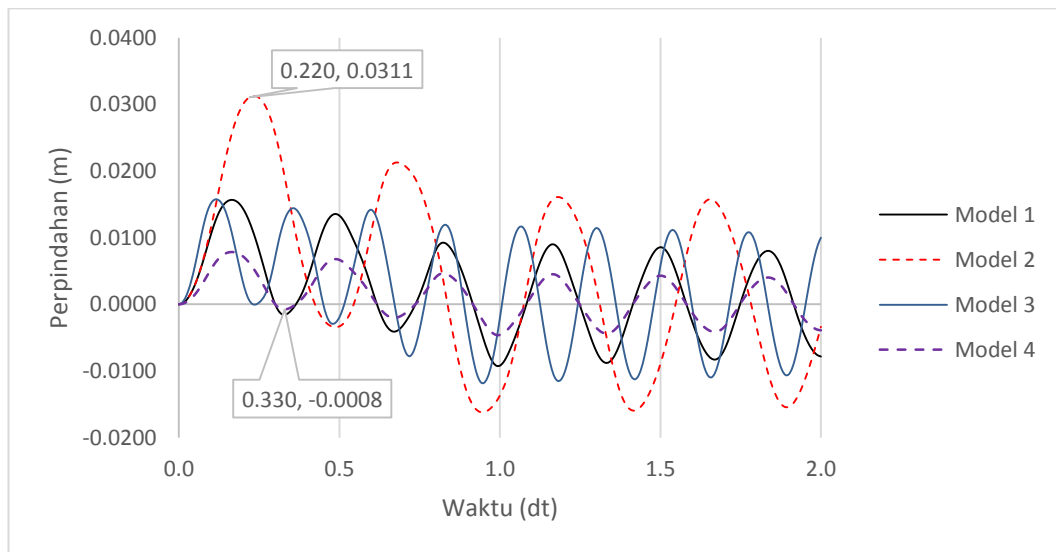
$$F(t) = \begin{cases} F_0 & \text{untuk } 0 \leq t \leq t_d \\ 0 & \text{untuk } t > t_d \end{cases}$$



Sistem 4 DOF

a. Perpindahan

Sistem teredam 4 DOF model 2 dimana massa sama dengan dan kekakuan setengah dari acuan menghasilkan nilai perpindahan maksimum tertinggi diantara model sistem lainnya. Seperti yang dapat dilihat pada gambar di bawah ini, sistem 4 DOF model 2 perpindahan mencapai nilai maksimum sebesar 0.031 m pada waktu 0.22 detik. Sedangkan nilai perpindahan maksimum terendah sebesar 0.0046 m pada waktu 1 detik dihasilkan dari sistem 4 DOF model 4 dimana nilai massa dan kekakuan sebesar dua kali acuan.



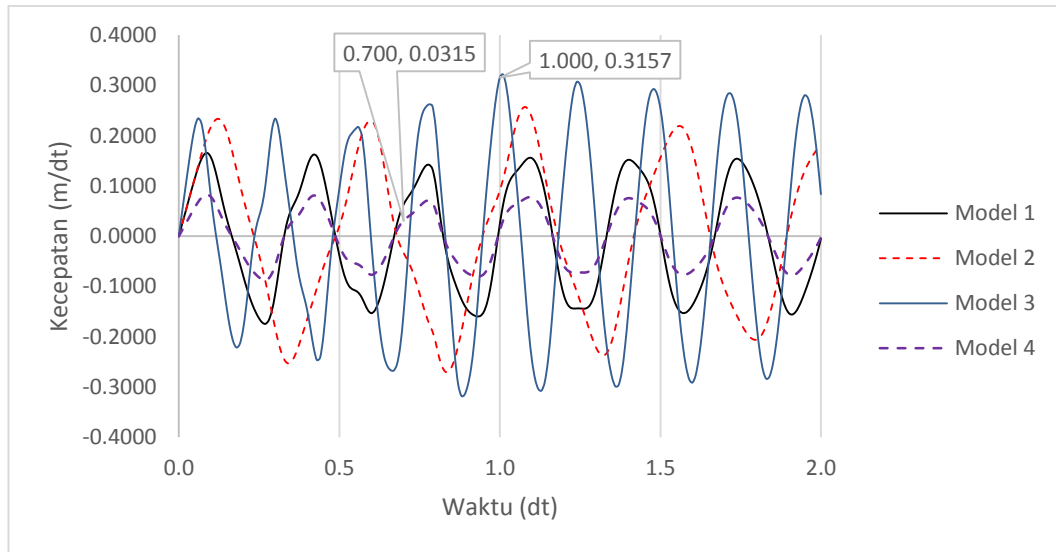
Pengaruh signifikan nilai kekakuan terhadap perpindahan sistem dengan redaman juga dapat dilihat pada grafik riwayat waktu sistem 4 DOF model 1 dan 3 dimana nilai massa yang digunakan sama yaitu sebesar 4202.5 kg, walaupun pada model 3 nilai massa setengah dari acuan, tetapi selisih nilai perpindahan yang dihasilkan tidak besar apabila dibandingkan dengan perpindahan pada sistem 4 DOF

model 2 dan 4. Berdasarkan hal tersebut dapat disimpulkan secara singkat bahwa pada sistem 4 DOF teredam, parameter yang paling mempengaruhi tinggi maupun rendahnya nilai perpindahan adalah kekakuan dari sistem itu sendiri. Hasil yang didapat tidak berbeda dari sistem 4, 6 dan 8 DOF yang diberi beban luar berupa beban sinusoidal maupun beban dengan pola segitiga dimana parameter yang mempengaruhi perpindahan adalah kekakuan dari sistem.

a. Kecepatan

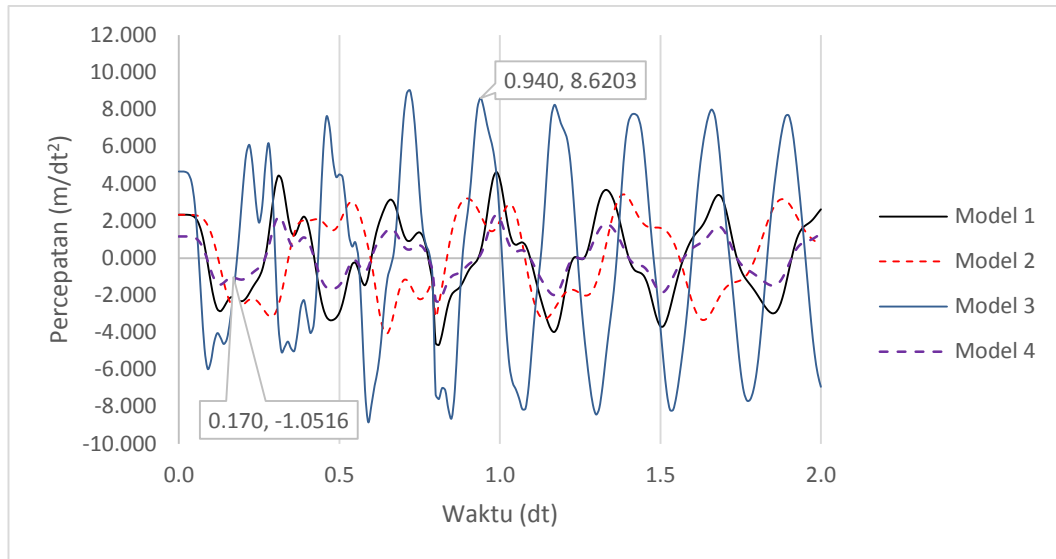
Beban luar dengan pola segiempat yang disimulasikan pada sistem 4 DOF dengan 4 model mencapai nilai kecepatan maksimum tertinggi pada model 3 dimana kecepatan sebesar 0.3157 m/dt pada waktu 1 detik berdasarkan gambar di bawah ini. Sedangkan nilai kecepatan maksimum terendah sebesar 0.0837 m/dt pada waktu 0.28 detik terjadi pada model 4. Sesuai dengan data parameter sistem yang telah ditetapkan sebelumnya untuk tiap – tiap model, diketahui bahwa model 3 memiliki nilai massa setengah dari acuan dan nilai kekakuan sesuai dengan acuan, sedangkan model 4 memiliki nilai massa dan kekakuan dua kali acuan.

Berdasarkan data-data yang ada, maka dapat dilihat bahwa hasil perhitungan menunjukkan bahwa parameter yang paling berpengaruh terhadap kecepatan sistem 4 DOF dengan redaman sebesar 5% adalah massa sistem. Hasil yang didapatkan tidak berbeda dari sistem 6 dan 8 DOF yang diberi beban luar berupa beban segitiga, namun berbeda dari sistem 4 DOF dengan beban segitiga dan sistem 4, 6 dan 8 DOF dengan beban sinusoidal dimana parameter yang paling berpengaruh terhadap nilai kecepatan adalah kekakuan sistem.



b. Percepatan

Riwayat waktu percepatan sistem berderajat kebebasan 4 DOF dengan beban segiempat secara singkat dapat dilihat pada gambar di bawah ini. Terdapat 4 model sistem yang diberikan beban dengan pola segiempat, dari seluruh sistem tersebut nilai perpindahan maksimum tertinggi dihasilkan oleh sistem 4 DOF model 3 sebesar 8.6203 m/dt^2 pada waktu 0.94 detik dengan nilai kekakuan serta redaman tetap seperti acuan dan nilai massa setengah dari acuan. Sedangkan model 4 dimana nilai massa dan kekakuan ditingkatkan menjadi dua kali acuan, menghasilkan percepatan maksimum terendah pada waktu 0.31 detik sebesar 2.2156 m/dt^2 .



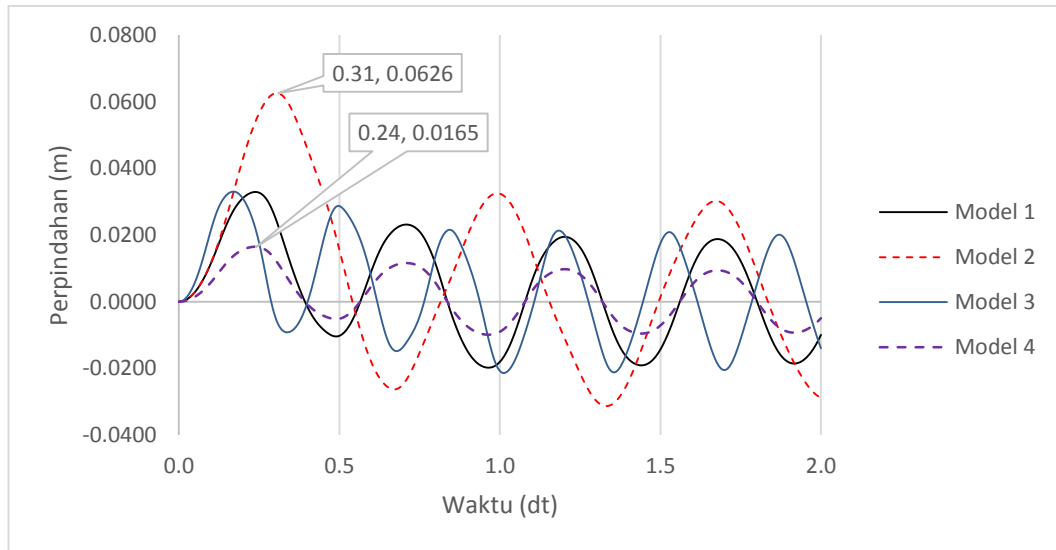
Pemberian beban berpola segiempat pada 4 model sistem dengan redaman memperlihatkan bahwa nilai massa merupakan parameter yang paling berpengaruh terhadap tinggi maupun rendahnya nilai percepatan yang dihasilkan. Hal ini dapat dilihat dari percepatan sistem pada model 3 dimana nilai massa diubah menjadi setengah dari acuan, perpindahan maksimum yang dihasilkan sangat tinggi. Namun pada model 2 dimana nilai massa tetap dan kekakuan setengah dari acuan, nilai perpindahan maksimum yang dihasilkan bahkan tidak lebih tinggi dari model 1 yang merupakan acuan. Sistem 4 DOF model 4 dimana nilai kekakuan dan massa meningkat sebesar dua kali nilai acuan memperjelas bahwa tingginya nilai perpindahan berbanding terbalik dengan besarnya nilai kekakuan sistem.

Sistem 6 DOF

a. Perpindahan

Grafik respon perpindahan sistem 6 DOF akibat adanya beban dinamik berpola segiempat dapat dilihat pada gambar di bawah ini. Sistem 8 DOF model 2 menghasilkan nilai perpindahan maksimum tertinggi yaitu 0.0626 m pada waktu 0.31 detik. Berbeda dengan model 2, model 4 menghasilkan nilai perpindahan maksimum terendah yaitu 0.0165 m pada waktu 0.24 detik.

Model 2 dan 4 memiliki perbedaan dari nilai parameter yang digunakan, pada model 2 nilai massa yang digunakan adalah massa acuan sedangkan kekakuan setengah dari acuan, pada model 4 nilai massa dan kekakuan yang digunakan dua kali acuan. Berdasarkan beda nilai perpindahan yang dihasilkan serta nilai perpindahan model 1 dan 3 dimana kekakuan sama dengan acuan yang tidak terpaut jauh, dapat diketahui bahwa pada sistem 6 DOF parameter yang paling berpengaruh terhadap nilai perpindahan adalah kekakuan sistem. Hasil ini tidak berbeda dengan sistem 4, 6 dan 8 DOF yang dibebani pola segitiga serta sistem 4, 6 dan 8 DOF yang dibebani beban sinusoidal.

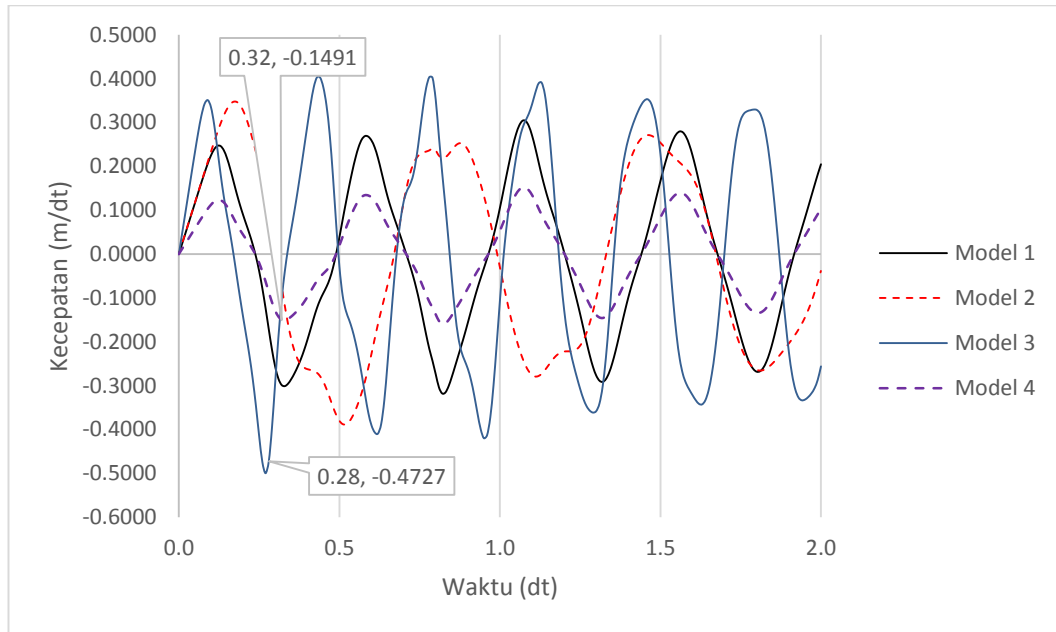


b. Kecepatan

Hasil respon kecepatan 4 model dari sistem 6 DOF akibat beban segiempat dapat dilihat pada gambar berikut ini. Model 3 dimana nilai massa setengah dari acuan dan nilai kekakuan tetap, menghasilkan nilai kecepatan tertinggi mencapai 0.473 m/dt pada waktu 0.28 detik. Model 4 dimana nilai massa dan kekakuan dua kali acuan menghasilkan nilai kecepatan terendah dimana hanya 0.149 m/dt pada waktu 0.32 detik.

Berdasarkan data dari riwayat waktu nilai kecepatan, dapat dilihat bahwa pada sistem 6 DOF dengan redaman sebesar 5% yang dengan beban luar pola segiempat, parameter yang mempengaruhi nilai kecepatan adalah massa dari sistem. Hal ini dikarenakan model 3 memiliki nilai kekakuan yang sama dengan model 1, hanya nilai massa setengah dari acuan namun dapat menghasilkan nilai kecepatan maksimum tertinggi diantara 3 model lainnya. Hasil yang didapat sama seperti sistem 4 DOF dengan beban segiempat namun berbeda dari sistem 4 DOF dengan beban segitiga dan sistem 4, 6 dan 8 DOF dengan beban sinusoidal dimana

parameter kekakuan merupakan yang paling berpengaruh terhadap nilai kecepatan suatu sistem.

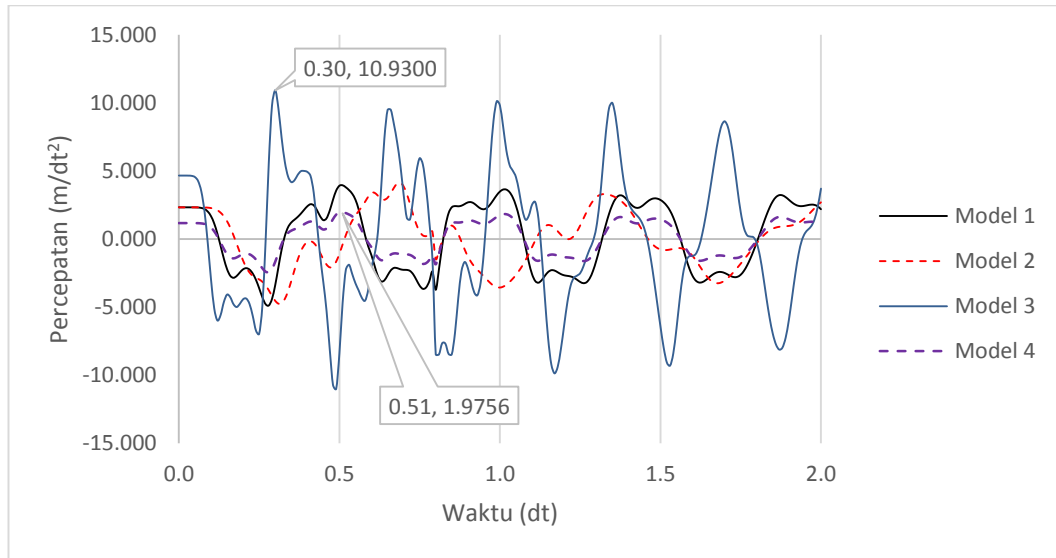


c. Percepatan

Grafik pada gambar di bawah ini memperlihatkan riwayat waktu percepatan sistem 6 DOF dengan beban luar berpola segiempat. Nilai kecepatan tertinggi dihasilkan model 3 pada waktu 0.3 detik sebesar 10.9 m/dt^2 . Sedangkan nilai percepatan maksimum terendah terjadi pada model 4 sebesar 1.98 m/dt^2 pada waktu 0.51 detik. Sesuai dengan nilai parameter sistem yang digunakan, model 3 memiliki nilai massa setengah dari acuan dan kekakuan sama dengan acuan, model 4 memiliki nilai massa dan kekakuan dua kali dari acuan.

Berdasarkan hal tersebut dapat diketahui bahwa pada sistem 6 DOF dengan redaman sebesar 5% dan diberi beban luar berpola segiempat, parameter sistem yang paling berpengaruh pada nilai percepatan adalah massa sistem. Hasil yang didapat

tidak berbeda dari sistem 4, 6 dan 8 DOF yang diberi beban luar berupa beban sinusoidal dan sistem 4,6 dan 8 DOF dengan beban sinusoidal.



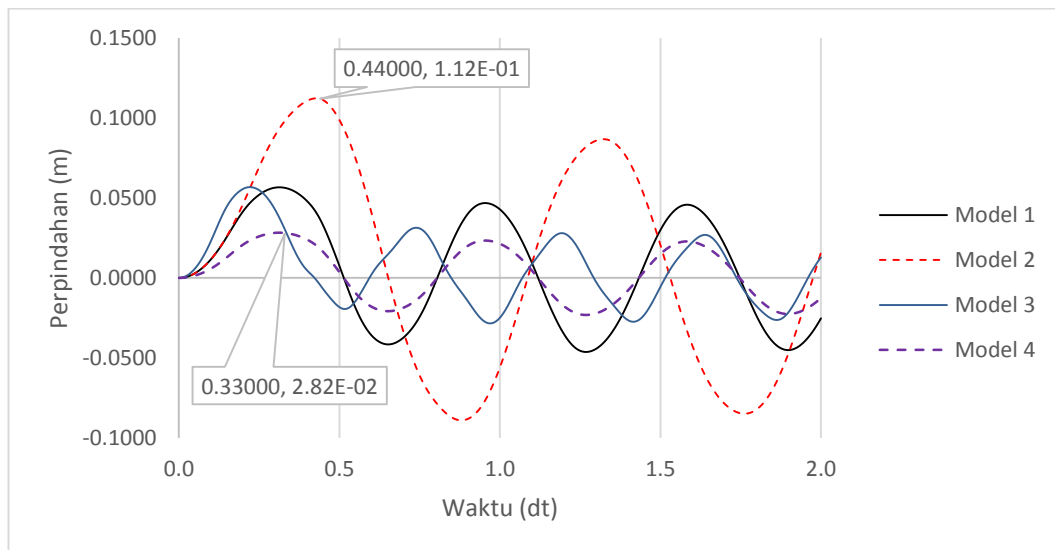
Sistem 8 DOF

a. Perpindahan

Sistem 8 DOF model 2 menghasilkan nilai perpindahan maksimum tertinggi yaitu 0.112 m pada waktu 0.44 detik apabila dilihat dari grafik pada gambar di bawah ini. Model 2 ini menggunakan nilai massa sama dengan acuan dan nilai kekakuan setengah dari acuan. Sedangkan model 4 menghasilkan nilai perpindahan maksimum terendah pada waktu 0.33 detik sebesar 0.0282 m. Berdasarkan grafik pada gambar tersebut, dapat dilihat bahwa sistem 8 DOF model 1 dan 3 memiliki selisih nilai perpindahan yang tidak terlalu jauh.

Hal ini berarti, pada sistem 8 DOF dengan beban segiempat serta persentase redaman 5% parameter yang memiliki pengaruh paling signifikan dalam *output* berupa kecepatan merupakan kekakuan dari sistem. Hasil tersebut tidak berbeda

dengan sistem 4, 6 dan 8 DOF lainnya yang diberi beban sinusoidal dan segitiga dimana tinggi kecepatan dipengaruhi oleh besarnya nilai kekakuan dari sistem, namun nilai kecepatan maksimum yang dihasilkan sistem 8 DOF pada masing – masing model lebih besar apabila dibandingkan dengan sistem 4 dan 6 DOF.

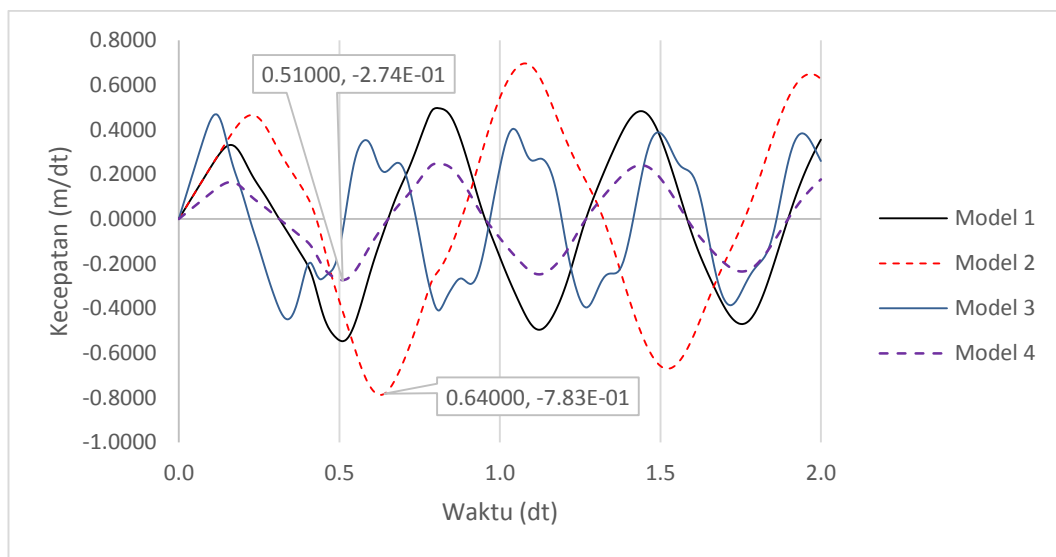


b. Kecepatan

Hasil perhitungan respon sistem berupa riwayat waktu kecepatan 4 model dari sistem 8 DOF dapat dilihat pada gambar di bawah ini. Model 2 dimana nilai massa tetap dan nilai kekakuan setengah dari acuan, menghasilkan nilai kecepatan tertinggi mencapai 0.785 m/dt pada waktu 0.64 detik. Model 4 dimana nilai massa dan kekakuan dua kali acuan menghasilkan nilai kecepatan terendah dimana hanya 0.274 m/dt pada waktu 0.51 detik.

Berdasarkan data parameter dan masing – masing nilai kecepatan, dapat dilihat bahwa pada sistem 8 DOF dengan redaman sebesar 5% serta beban luar berpola segitiga, parameter yang mempengaruhi nilai kecepatan adalah kekakuan dari sistem. Hal ini dikarenakan model 2 memiliki nilai kekakuan yang sama dengan

model 1, hanya nilai kekakuan setengah dari acuan namun dapat menghasilkan nilai kecepatan maksimum tertinggi diantara 3 model lainnya. Hasil yang didapat sama dengan sistem 4 DOF dengan beban segitiga dan sistem 4, 6 dan 8 DOF dengan beban sinusoidal dimana parameter kekakuan merupakan yang paling berpengaruh terhadap nilai kecepatan suatu sistem tanpa adanya model pada nilai persentase redaman.

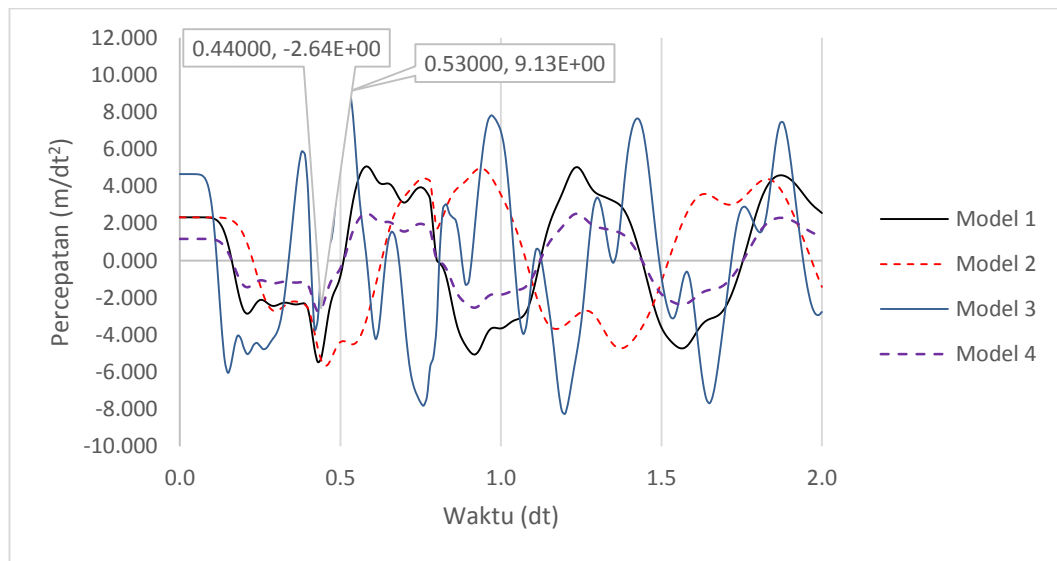


c. Percepatan

Model sistem 8 DOF yang menghasilkan respon nilai percepatan maksimum tertinggi berdasarkan gambar di bawah ini merupakan model 3 dimana massa setengah dari acuan dan kekakuan tetap. Percepatan mencapai 9.13 m/dt^2 pada waktu 0.53 detik. Sedangkan nilai percepatan maksimum terendah yaitu 2.64 m/dt^2 pada waktu 0.44000 detik merupakan hasil dari perhitungan sistem 8 DOF model 4 dimana nilai kekakuan dan massa dua kali acuan. Hasil pada sistem 8 DOF model 4 menunjukkan bahwa apabila massa dari sistem ditingkatkan maka nilai percepatan

akan semakin rendah. Namun percepatan maksimum justru diperoleh pada model 3 dimana nilai massa setengah dari acuan.

Hasil yang didapat sama dengan hasil pada sistem 4 dan 6 DOF dimana percepatan maksimum tertinggi dihasilkan dari model 3, sehingga dapat disimpulkan bahwa parameter sistem yang paling berpengaruh terhadap tinggi atau rendahnya percepatan adalah massa sistem. Apabila grafik pada di bawah ini diamati, maka dapat dilihat bahwa nilai percepatan sistem 8 DOF model 1 dan 2 tidak berbeda jauh, sehingga dapat diketahui bahwa walaupun terdapat perbedaan pada nilai percepatan maksimum, massa sistem merupakan parameter yang paling berpengaruh terhadap hasil akhir percepatan.

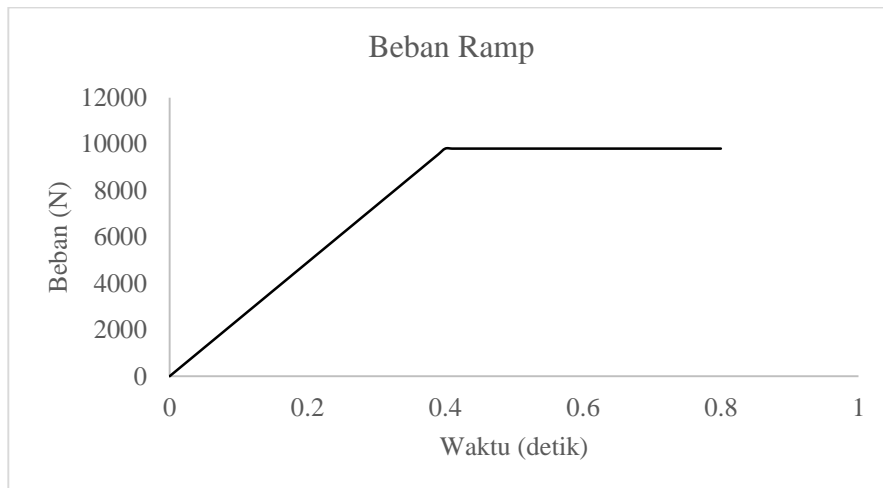


6.3.4. Beban Ramp

Analisis perhitungan program terhadap sistem yang diberi beban *ramp* seperti pada gambar di bawah ini dilakukan selama 2 detik dengan *time step* sebesar 0.01 detik. Fungsi beban segitiga yang digunakan pada tersebut dapat dijabarkan dalam persamaan di bawah ini dengan nilai F_0 sebesar 1000 kg dan durasi beban

selama 0.8 detik. Nilai F_0 dan durasi beban sinusoidal yang digunakan pada masing – masing sistem dengan 4 model tidak berbeda.

$$F(t) = \begin{cases} F_0 \left(\frac{t}{t_0}\right) & \text{untuk } 0 \leq t \leq t_0 \\ F_0 & \text{untuk } t > t_0 \end{cases}$$



Sistem 4 DOF

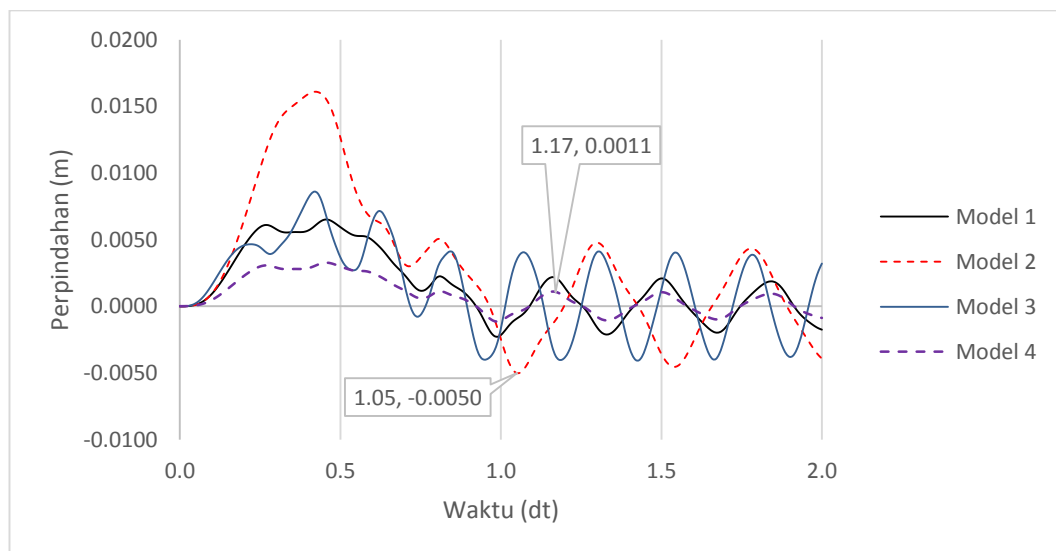
a. Perpindahan

Sistem teredam 4 DOF model 2 dengan beban *ramp* menghasilkan nilai perpindahan maksimum tertinggi diantara model sistem lainnya. Seperti yang dapat dilihat pada gambar di bawah ini, sistem 4 DOF model 2 dimana nilai massa tetap dan kekakuan setengah acuan menghasilkan perpindahan mencapai 0.0050 m pada waktu 1.05 detik. Sedangkan nilai perpindahan maksimum terendah sebesar 0.0011 m pada waktu 1.17 detik dihasilkan dari sistem 4 DOF model 4 dimana nilai massa dan kekakuan sebesar dua kali acuan.

Perpindahan sistem model 1 dan 3 juga dapat dilihat pada grafik riwayat waktu sistem 4 DOF, dari grafik dapat dilihat selisih nilai perpindahan yang

dihasilkan tidak besar. Parameter yang membedakan nilai respon masing – masing sistem adalah massa, kekakuan dan redaman sistem itu sendiri. Model 1 dan 3 menggunakan nilai kekakuan tetap, namun pada model 3 nilai massa yang digunakan hanya setengah dari acuan, nilai perpindahan jauh berbeda apabila dibandingkan dengan sistem 4 DOF model 2 dan 4.

Berdasarkan hal tersebut dapat diketahui bahwa kekakuan memiliki pengaruh yang signifikan terhadap respon perpindahan sistem. Hasil yang didapat tidak berbeda dari sistem 4, 6 dan 8 DOF yang diberi beban luar berupa beban sinusoidal, beban dengan pola segitiga dan segiempat dimana parameter yang mempengaruhi perpindahan adalah kekakuan dari sistem.

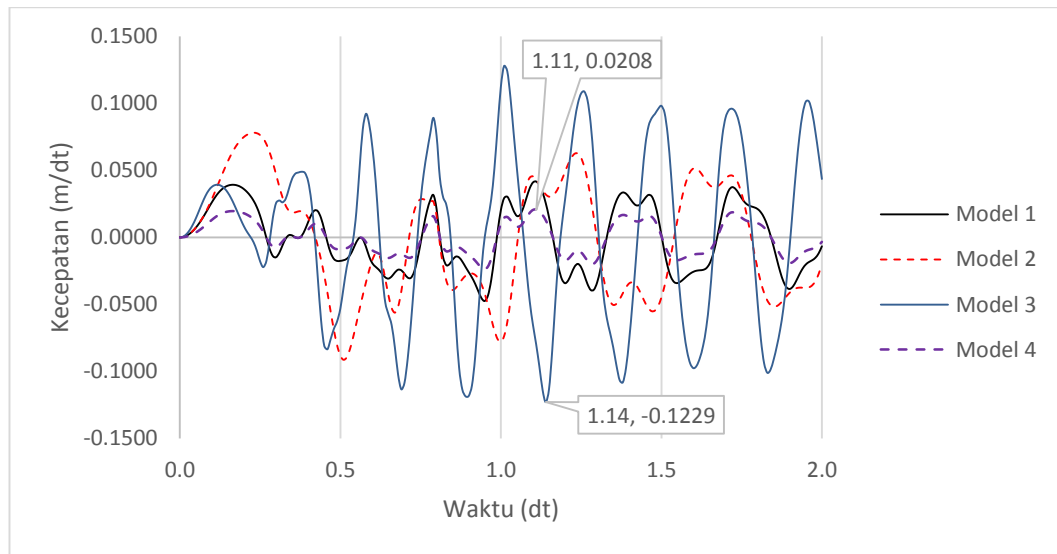


b. Kecepatan

Beban luar berpola *ramp* digunakan dalam simulasi sistem 4 DOF dengan 4 model dari gambar di bawah ini mencapai nilai kecepatan maksimum tertinggi pada model 3 dimana kecepatan sebesar 0.1229 m/dt pada waktu 1.14 detik. Sedangkan nilai kecepatan maksimum terendah sebesar 0.0208 m/dt pada waktu 1.11 detik

terjadi pada model 4. Sesuai dengan data parameter sistem yang ditetapkan untuk tiap – tiap model, diketahui bahwa model 3 memiliki nilai massa setengah dari acuan dan nilai kekakuan tetap, sedangkan model 4 memiliki nilai massa dan kekakuan dua kali acuan.

Berdasarkan data – data yang ada, maka dapat dilihat bahwa hasil perhitungan menunjukkan bahwa parameter yang paling berpengaruh terhadap kecepatan sistem 4 DOF dengan beban *ramp* adalah massa sistem. Hasil yang didapatkan tidak berbeda dari sistem 4,6 dan 8 DOF yang diberi beban luar berupa beban segitiga, namun berbeda dengan beberapa model sistem lainnya dengan beban luar segiempat dan sinusoidal.

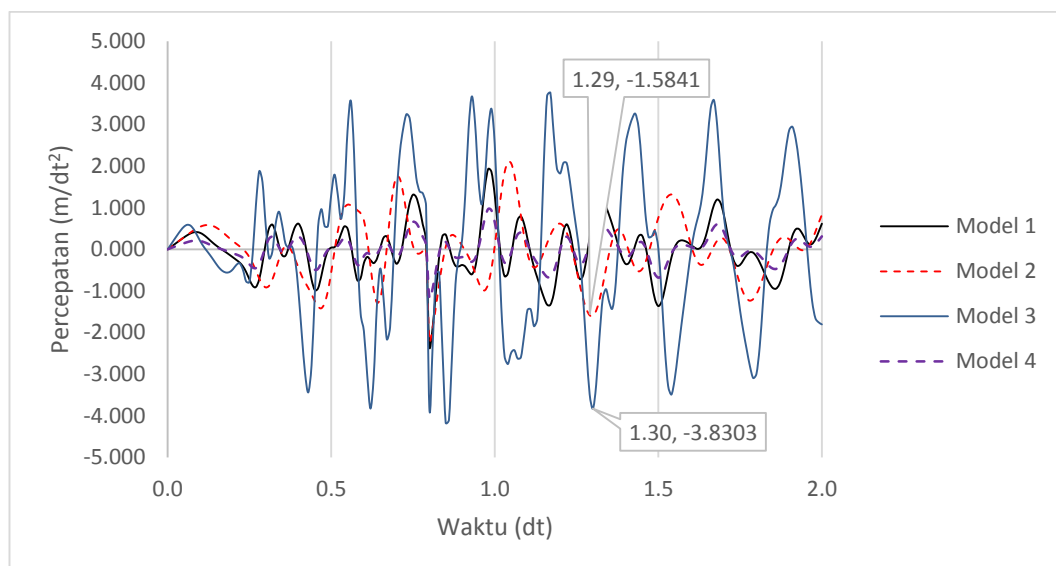


c. Percepatan

Sistem teredam 4 DOF model 3 dengan massa setengah dari acuan dan kekakuan tetap menghasilkan nilai percepatan maksimum tertinggi diantara model sistem lainnya. Seperti yang dapat dilihat pada gambar di bawah ini, sistem 4 DOF model 3 nilai maksimum percepatan mencapai 3.8303 m/dt^2 pada waktu 1.30 detik.

Sedangkan nilai percepatan maksimum terendah sebesar 1.5841 m/dt^2 pada waktu 1.29 detik dihasilkan dari sistem 4 DOF model 4 dimana nilai massa dan kekakuan sebesar dua kali acuan.

Pengaruh signifikan nilai massa terhadap percepatan sistem dengan redaman juga dapat dilihat pada grafik riwayat waktu sistem 4 DOF model 1 dan 2 dimana nilai massa yang digunakan sama yaitu sebesar 4202.5 kg , walaupun pada model 2 nilai kekakuan setengah dari acuan, tetapi selisih nilai percepatan yang dihasilkan tidak besar apabila dibandingkan dengan percepatan pada sistem 4 DOF model 3. Berdasarkan hal tersebut dapat diketahui secara singkat bahwa pada sistem 4 DOF dengan beban luar *ramp*, parameter yang paling mempengaruhi tinggi maupun rendahnya nilai percepatan adalah massa dari sistem itu sendiri. Hasil yang didapat tidak berbeda dari model sistem 4, 6 dan 8 DOF lainnya dengan beban luar berupa beban sinusoidal, segitiga, dan segiempat.

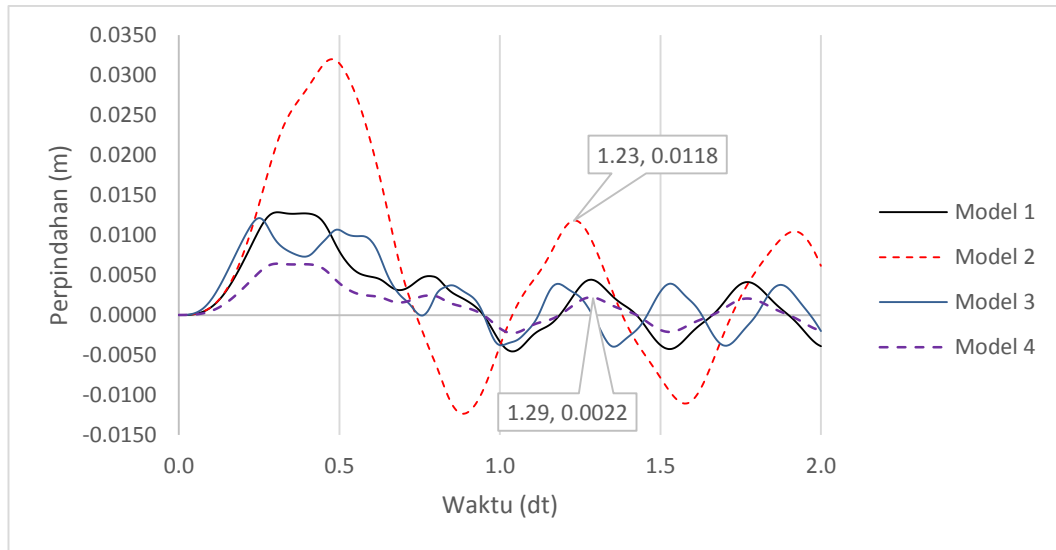


Sistem 6 DOF

a. Perpindahan

Gambar berikut ini menampilkan grafik riwayat waktu perpindahan sistem 6 DOF akibat beban luar *ramp*. Berdasarkan gambar tersebut, dapat dilihat bahwa perpindahan maksimum tertinggi sistem 6 DOF terjadi pada model 2 dimana perpindahan mencapai 0.0118 m di waktu 1.23 detik. Model 4 menghasilkan nilai perpindahan maksimum terendah dimana perpindahan hanya mencapai 0.0022 m di waktu 1.29 detik. Model 2 dan model 4 sendiri memiliki nilai parameter sistem yang berbeda, model 2 menggunakan nilai massa acuan dengan kekakuan setengah dari acuan sedangkan model 4 menggunakan nilai massa dan kekakuan dua kali acuan. Sedangkan model 1 dan 3 dimana perbedaan nilai parameter hanya terdapat pada massa model 3 yang memiliki nilai setengah dari acuan, menghasilkan respon perpindahan yang tidak jauh berbeda.

Berdasarkan data parameter yang digunakan dan perpindahan yang dihasilkan masing-masing model sistem dapat dilihat bahwa parameter kekakuan menjadi yang paling berpengaruh terhadap nilai perpindahan suatu sistem. Hasil ini tidak berbeda dari sistem 4, 6 dan 8 DOF yang diberi beban luar berupa fungsi sinusoidal, beban segitiga maupun beban segiempat. Hal ini berarti dalam sistem 6 DOF dengan redaman 5%, tipe beban yang digunakan tidak mempengaruhi parameter penentu nilai respon berupa perpindahan.

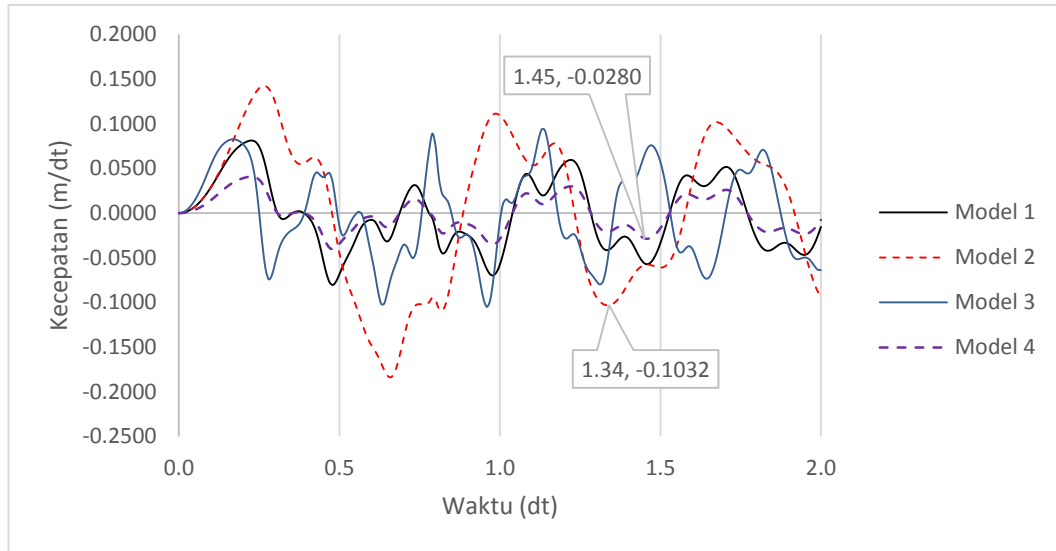


b. Kecepatan

Sistem 6 DOF yang diberi beban luar *ramp* pada 4 model yang telah ditentukan mencapai nilai kecepatan maksimum tertinggi pada model 2 dimana kecepatan sebesar 0.1032 m/dt pada waktu 1.34 detik. Sedangkan nilai kecepatan maksimum terendah sebesar 0.0280 m/dt pada waktu 1.45 detik terjadi pada model 4. Sesuai dengan data parameter sistem yang ditetapkan untuk tiap – tiap model, diketahui bahwa model 2 memiliki nilai kekakuan setengah dari acuan dan nilai massa tetap, sedangkan model 4 memiliki nilai massa dan kekakuan dua kali acuan. Berdasarkan di bawah ini dapat dilihat model 1 dan 3 menghasilkan nilai perpindahan yang tidak jauh berbeda dengan parameter yang digunakan hanya berbeda pada nilai massa.

Berdasarkan data – data yang ada, maka dapat dilihat bahwa hasil perhitungan menunjukkan bahwa parameter yang paling berpengaruh terhadap kecepatan sistem 6 DOF dengan redaman sebesar 5% adalah kekakuan sistem. Hasil yang didapatkan tidak berbeda dari beberapa sistem yang diberi beban luar berupa

beban sinusoidal, beban segitiga dan beban segiempat, namun juga ada beberapa model yang menghasilkan parameter berbeda dimana kekakuan berpengaruh terhadap kecepatan sistem.

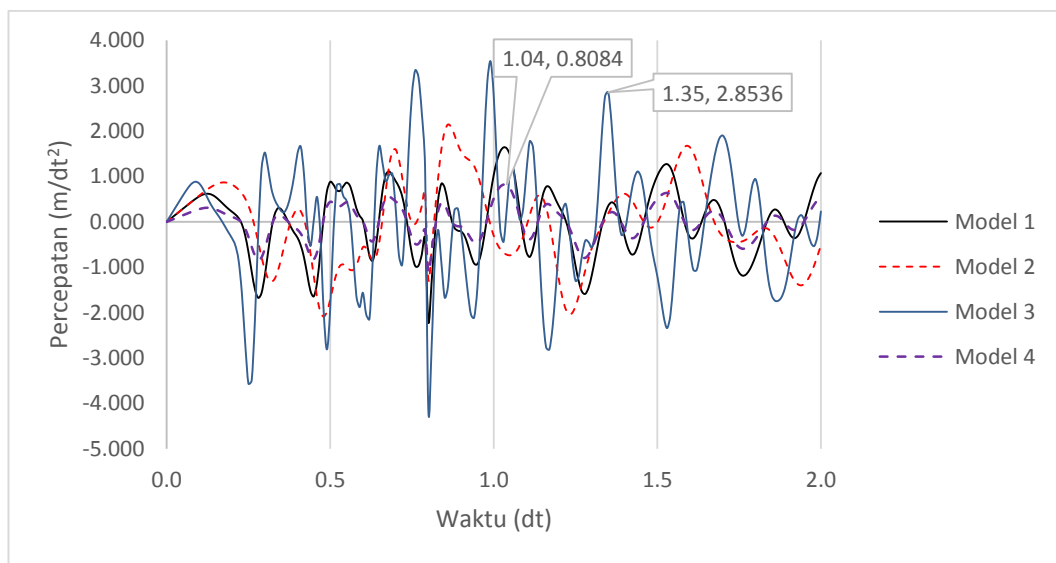


c. Percepatan

Respon sistem 6 DOF pada gambar di bawah ini menghasilkan nilai percepatan maksimum tertinggi merupakan model 3 dimana massa sesuai acuan dan kekakuan setengah dari acuan. Percepatan mencapai 2.8536 m/dt^2 pada waktu 1.35 detik. Sedangkan nilai percepatan maksimum terendah yaitu 0.8084 m/dt^2 pada waktu 1.04 detik merupakan hasil dari perhitungan sistem 6 DOF model 4 dimana nilai kekakuan dan massa dua kali acuan. Hasil pada sistem 6 DOF model 4 menunjukkan bahwa apabila massa dari sistem ditingkatkan maka nilai percepatan akan semakin rendah. Namun percepatan maksimum justru diperoleh pada model 3 dimana nilai massa setengah dari acuan dan nilai kekakuan tetap.

Hal ini sedikit sama dengan hasil pada sistem 4 DOF dimana percepatan maksimum tertinggi dihasilkan dari model 3 dengan besar massa setengah dari

acuan, sehingga dapat disimpulkan bahwa parameter sistem yang paling berpengaruh terhadap tinggi atau rendahnya percepatan adalah massa sistem. Apabila grafik pada tersebut diamati, maka dapat dilihat bahwa puncak nilai percepatan sistem 6 DOF model 2 dan 3 hampir berimpit, sehingga dapat diketahui bahwa walaupun terdapat perbedaan pada nilai percepatan maksimum, massa sistem merupakan parameter yang paling berpengaruh terhadap hasil akhir percepatan.

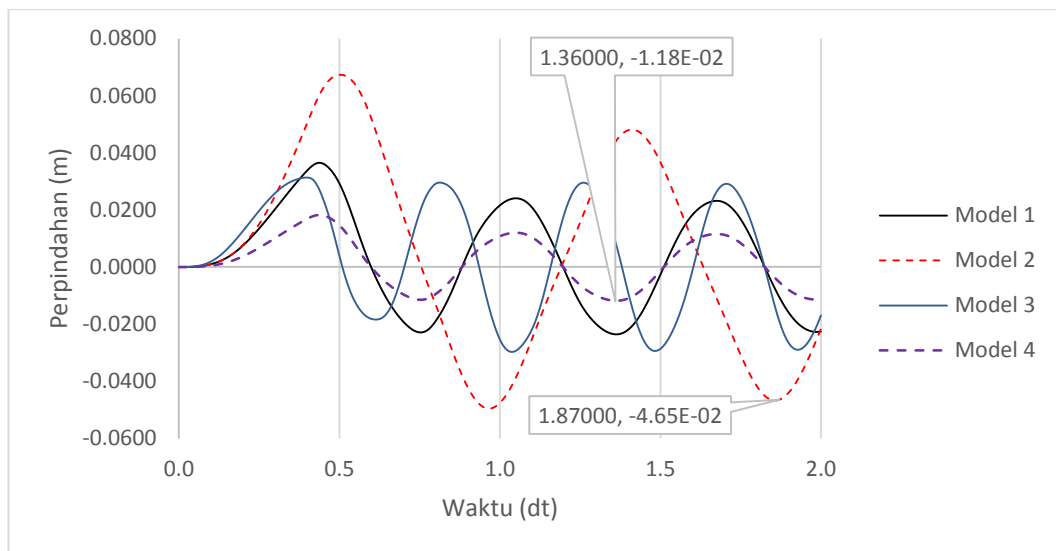


Sistem 8 DOF

a. Perpindahan

Grafik pada gambar di bawah ini memperlihatkan nilai respon perpindahan maksimum tertinggi pada sistem 8 DOF akibat beban *ramp* dihasilkan oleh model 2 dimana nilai massa tetap dan kekakuan setengah dari acuan, yaitu sebesar 0.0465 m pada waktu 1.87 detik. Sedangkan nilai terendah perpindahan maksimum dari sistem 8 DOF dengan redaman 5% dihasilkan dari model 4 pada waktu 1.36 detik sebesar 0.018 m dimana nilai massa dan kekakuan sistem adalah sebesar dua kali acuan.

Berdasarkan hal tersebut, dapat diketahui bahwa pada sistem 8 DOF parameter yang paling mempengaruhi nilai perpindahan adalah kekakuan sistem. Hasil yang didapat pada sistem 8 DOF dimana parameter kekakuan merupakan parameter yang paling berpengaruh terhadap nilai perpindahan sistem tidak berbeda dengan hasil yang didapat pada sistem dengan 4 dan 6 DOF lain yang diberi beban *ramp*. Sehingga secara singkat dapat dilihat bahwa derajat kebebasan tidak berpengaruh terhadap berubahnya parameter yang menentukan nilai perpindahan sistem.

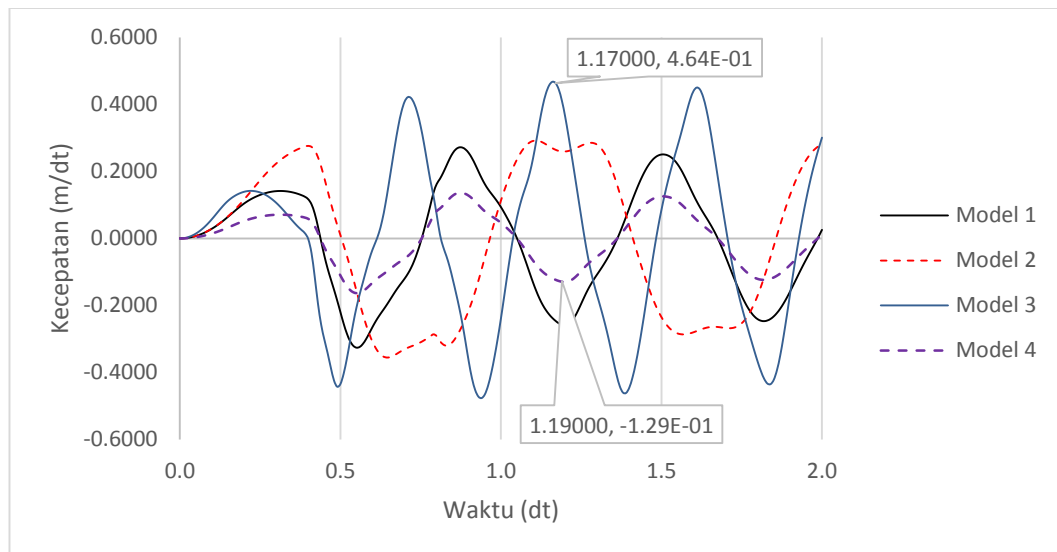


b. Kecepatan

Berdasarkan gambar di bawah ini sistem 8 DOF mencapai kecepatan maksimum tertinggi pada model 3 dimana kecepatan mencapai 0.464 m/dt pada waktu 1.17 detik. Sedangkan kecepatan maksimum terendah terjadi pada model 4 dimana kecepatan hanya 0.129 m/dt pada waktu 1.19 detik. Sedangkan model 1 dan 2 menghasilkan nilai kecepatan yang tidak jauh berbeda. Hal ini berarti pada sistem

8 DOF dengan nilai redaman 5% di setiap model, parameter sistem yang paling mempengaruhi merupakan massa sistem.

Nilai massa sistem pada model 3 hanya setengah dari acuan namun kecepatan yang dihasilkan memiliki nilai tertinggi diantara nilai kecepatan lainnya dari masing – masing model sistem. Berbanding terbalik dengan sistem pada model 4 dimana nilai kekakuan 2 kali acuan dan nilai kecepatan yang didapat memiliki nilai terendah. Hasil yang didapat pada sistem 8 DOF dengan beban *ramp* dimana parameter massa merupakan parameter yang paling berpengaruh terhadap nilai kecepatan sistem tidak berbeda dengan hasil yang didapat pada sistem dengan 4 dan 6 DOF. Hal ini berarti dalam analisis derajat kebebasan sistem tidak mempengaruhi perubahan parameter yang mempengaruhi nilai kecepatan.

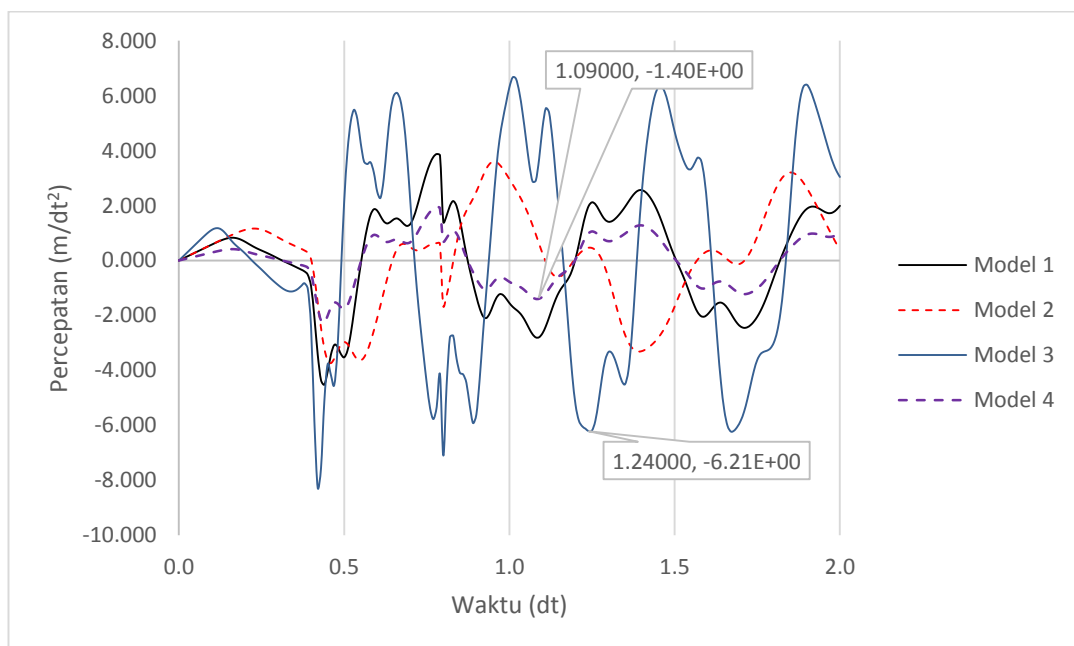


c. Percepatan

Sistem teredam 8 DOF model 3 dengan massa 2101.25 kg dan kekakuan 12374718.5 N/m yang diberi beban *ramp* menghasilkan nilai percepatan maksimum tertinggi diantara model lainnya. Seperti yang dapat dilihat pada gambar di bawah

ini, sistem 8 DOF model 3 mencapai nilai percepatan maksimum sebesar 6.21 m/dt^2 pada waktu 1.24 detik. Sedangkan nilai percepatan maksimum terendah sebesar 1.40 m/dt^2 pada waktu 1.09 detik dihasilkan dari sistem 4 DOF model 4 dimana nilai massa dan kekakuan sebesar dua kali acuan.

Pengaruh signifikan nilai massa terhadap percepatan sistem dengan redaman juga dapat dilihat pada grafik riwayat waktu sistem 8 DOF model 1 dan 2 dimana nilai massa yang digunakan sama yaitu sebesar 4202.5 kg , walaupun pada model 2 nilai kekakuan setengah dari acuan, tetapi selisih nilai percepatan yang dihasilkan tidak besar apabila dibandingkan dengan percepatan pada sistem 8 DOF model 3. Berdasarkan hal tersebut dapat disimpulkan secara singkat bahwa pada sistem 8 DOF teredam, parameter yang paling mempengaruhi tinggi maupun rendahnya nilai percepatan adalah massa dari sistem itu sendiri.



6.4 Rangkuman

Secara ringkas respon maksimum sistem 4, 6 dan 8 DOF akibat beban dinamik berupa sinusoidal, pola segitiga, segiempat dan ramp dapat dilihat pada Tabel 6.2. Berdasarkan Tabel 6.2 dapat dilihat hubungan antara nilai respon sistem dengan beban luar yang diberikan yaitu:

- a. Nilai perpindahan tertinggi dihasilkan dari simulasi numerik sistem akibat adanya beban luar dengan pola segiempat.
- b. Nilai kecepatan tertinggi dihasilkan dari simulasi numerik sistem akibat adanya beban luar dengan fungsi segiempat.
- c. Nilai percepatan tertinggi dihasilkan dari simulasi numerik sistem akibat adanya beban luar dengan pola segiempat.

Sementara dari data perpindahan dan kecepatan dapat dilihat bahwa semakin banyak jumlah derajat kebebasan (DOF) dari suatu sistem, maka nilai respon perpindahan dan kecepatan akan meningkat baik pada sistem dengan beban luar berupa sinusoidal, segitiga, segiempat maupun ramp. Namun dari data percepatan, dapat dilihat bahwa nilai percepatan cenderung meningkat pada sistem 4 dan 6 DOF lalu menurun pada sistem 8 DOF.

Apabila respon sistem ditinjau dari parameter yang mempengaruhi nilainya, maka data dapat dilihat pada Tabel 6.2. Masing – masing respon akibat beban dinamik memiliki hasil berbeda yang sesuai dengan data riwayat waktu respon. Berdasarkan data yang terdapat pada Tabel 6.3 dapat dihitung persentase pengaruh parameter sistem terhadap respon yang dihasilkan.

Tabel 6. 2 Rekapitulasi Respon Maksimum Sistem

Respon Maksimum	DOF	Beban			
		Sinusoidal	Segitiga	Segiempat	<i>Ramp</i>
Perpindahan (m)	4	0.00780	0.02490	0.03110	0.00500
	6	0.04260	0.04570	0.06260	0.01180
	8	0.10340	0.06700	0.11200	0.04650
Kecepatan (m/dt)	4	0.12890	0.29390	0.31570	0.12290
	6	0.39300	0.47600	0.47300	0.10320
	8	0.78280	0.64500	0.78000	0.46400
Percepatan (m/dt ²)	4	4.72000	6.23090	8.62030	3.83030
	6	3.97100	10.0000	10.9000	2.85360
	8	4.67600	8.31000	9.13000	6.21000

Respon berupa perpindahan 100% data dipengaruhi oleh kekakuan sistem, respon berupa kecepatan 50% data dipengaruhi oleh massa dan 50% dipengaruhi oleh kekakuan sedangkan respon percepatan 83% data dipengaruhi oleh massa dan 17% oleh kekakuan sistem. Berdasarkan data, parameter redaman tidak mempengaruhi respon sistem dikarenakan satu – satunya nilai yang tidak dimodelkan adalah persentase redaman sistem.

Tabel 6. 3 Rekapitulasi Parameter yang Mempengaruhi Respon Sistem

Beban	Respon Sistem	DOF	Parameter yang Mempengaruhi			
			Massa	Kekakuan	Redaman	
Sinusoidal	Perpindahan	4	-	√	-	
		6	-	√	-	
		8	-	√	-	
	Kecepatan	4	-	√	-	
		6	-	√	-	
		8	-	√	-	
	Percepatan	4	√	-	-	
		6	-	√	-	
		8	-	√	-	
	Segitiga	Perpindahan	4	-	√	-
			6	-	√	-
			8	-	√	-
Kecepatan		4	-	√	-	
		6	√	-	-	
		8	√	-	-	
Percepatan		4	√	-	-	
		6	√	-	-	
		8	√	-	-	
Segiempat		Perpindahan	4	-	√	-
			6	-	√	-
			8	-	√	-
	Kecepatan	4	√	-	-	
		6	√	-	-	
		8	-	√	-	
	Percepatan	4	√	-	-	
		6	√	-	-	
		8	√	-	-	

Beban	Respon Sistem	DOF	Parameter yang Mempengaruhi		
			Massa	Kekakuan	Redaman
<i>Ramp</i>	Perpindahan	4	-	√	-
		6	-	√	-
		8	-	√	-
	Kecepatan	4	√	-	-
		6	-	√	-
		8	√	-	-
<i>Ramp</i>	Kecepatan	4	√	-	-
		8	√	-	-
	Percepatan	6	√	-	-
		8	√	-	-

6.5 Soal Latihan

Rencanakanlah struktur bertingkat banyak untuk bangunan perkantoran dengan menggunakan Software Metode Elemen Hingga. Bangunan terletak di daerah rawan gempa bumi berdasarkan SNI 1726 -2012.

Pertanyaan :

1. Tentukan perioda dan frekuensi natural dari struktur tersebut melalui analisis modal.
2. Hitunglah gaya dalam meliputi: momen, geser dan aksial pada 2 titik di lantai atap melalui analisis statis linear.
3. Tentukan respon struktur pada 2 titik tersebut, meliputi: perpindahan, kecepatan dan percepatan melalui analisis respon spektrum.

4. Tentukan respon struktur pada 2 titik tersebut akibat pembebanan dinamis meliputi: beban harmonis (sinusoidal dan cosinusoidal), beban trapezium, beban segitiga dan beban segiempat.

BAB 7

RESPON DINAMIS STRUKTUR BERDASARKAN GRAFIK SPEKTRUM RESPONS

Secara sederhana dijelaskan bahwa spektrum respons (*response spectra*) adalah plot respons maksimum (perpindahan, kecepatan, percepatan maksimum ataupun besaran yang diinginkan) dari fungsi beban tertentu untuk semua kemungkinan sistem berderajat-kebebasan-tunggal. Absis dari spektrum adalah frekuensi natural (atau periode) dari sistem dan ordinat adalah respons maksimum. Jadi untuk menentukan respons dari suatu grafik spektrum untuk suatu pengaruh tertentu, kita hanya perlu untuk mengetahui frekuensi natural dari sistem itu.

7. 1. Bentuk Spektrum Respons (*Construction Of Response Spectrum*)

Gambar 7.1(a) menunjukkan sebuah osilator tak teredam yang dipengaruhi oleh setengah periode gaya pengaruh sinusoidal pada Gambar 7.1(b). Mulanya sistem dianggap diam. Selang waktu dari impuls sinusoidal dinyatakan dengan t_d . Persamaan diferensial gerak didapatkan dengan menyamakan jumlah gaya-gaya pada diagram *Free Body* dengan nol, seperti pada Gambar 7.1(c) yaitu,

$$m\ddot{u} + ku = F(t) \quad (7.1)$$

dimana

$$F_0 \sin \bar{\omega}t \text{ untuk } 0 \leq t \leq t_d$$

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } 0 \leq t \leq t_d \end{cases} \quad (7.2)$$

dan

$$\varpi = \frac{\pi}{t_d} \quad (7.3)$$

Solusi Persamaan (7.1) dapat diselesaikan dengan integral Duhamel. Namun, pada contoh ini solusi Persamaan (7.1) didapat dengan metode integrasi langsung persamaan diferensial linier karena kesederhanaan bentuk gaya pengaruh, yaitu superposisi dari solusi komplementer u_c dan solusi partikular u_p ,

$$u = u_c + u_p \quad (7.4)$$

Samakan bagian kanan Persamaan (7.1) dengan nol,

$$u_c = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (7.5)$$

Dimana $\omega = \sqrt{k/m}$ adalah frekuensi natural. Solusi khusus untuk selang waktu $0 \leq t \leq t_d$ yang diberikan oleh bagian kanan Persamaan (7.1),

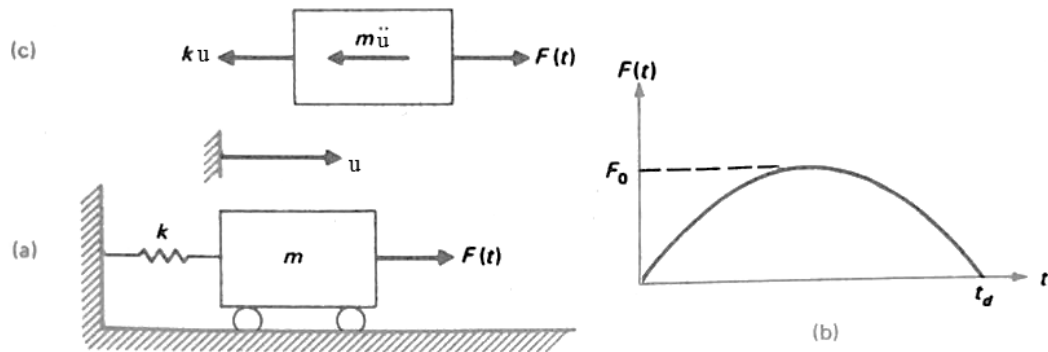
$$u_p = C \sin \varpi t \quad (7.6)$$

Substitusikan Persamaan (7.6) ke dalam (7.1) dan didapatkan:

$$C = \frac{F_o}{k - m\varpi^2} \quad (7.7)$$

Dengan mengkombinasikan Persamaan (7.4) dengan (7.7), kita dapatkan respons untuk $0 \leq t \leq t_d$ sebagai

$$u_c = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{F_o}{k - m \omega^2} \quad (7.8)$$



Gambar 7. 1 Osilator sederhana tak teredam dipengaruhi beban $F(t)$.

(b) Fungsi beban $F(f) = F_0 \sin \omega t (0 \leq t \leq t_d)$. (c) Diagram *Free body*

Dengan memasukkan kondisi awal $u(0) = 0$ dan $\dot{u}(0) = 0$ ke dalam Persamaan (7.8) dan menghitung konstanta integrasi A dan B, kita dapatkan

$$u = \frac{F_o / k}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \left[\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_n} \sin \omega t \right] \quad (7.9)$$

Untuk memudahkan perhitungan kita perkenalkan notasi-notasi,

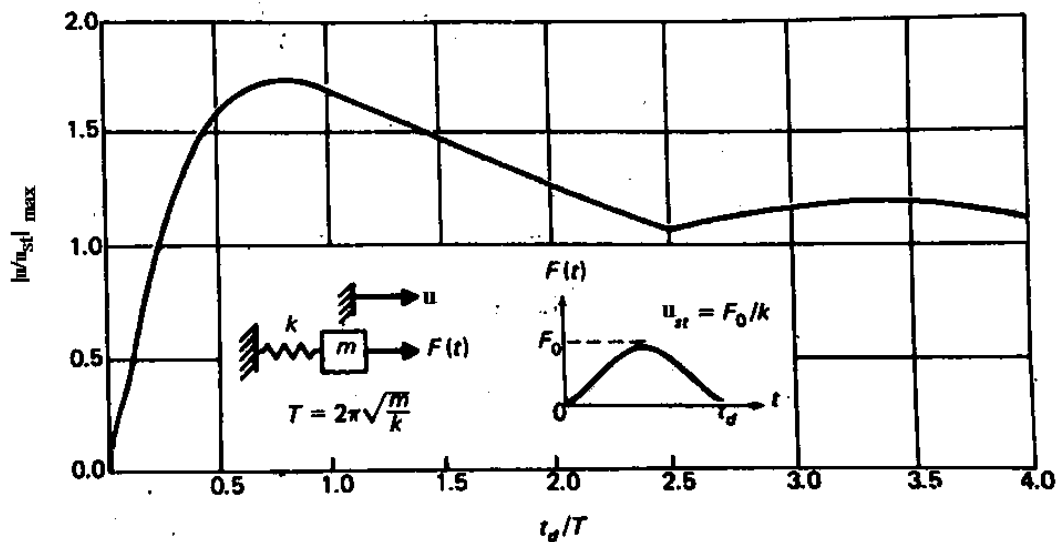
$$u_{st} = \frac{F_0}{k}, \quad \varpi = \frac{\pi}{t_d}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Maka Persamaan (7.9) menjadi

$$\frac{u}{u_{st}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{T}{2t_d}\right)^2} \left[\sin \pi \frac{t}{t_d} - \frac{T}{2t_d} \sin 2\pi \frac{t}{T} \right] \text{ untuk } 0 \leq t \leq t_d \quad (7.10a)$$

Oleh karena itu respons untuk $t > t_d$ didapat dari Persamaan (7.5) dengan konstanta integrasi yang ditentukan dari harga perpindahan dan kecepatan yang dihitung dari Persamaan (7.10a) pada waktu $t = t_d$. Respons akhir diberikan oleh

$$\frac{u}{u_{st}} = \frac{\frac{T}{t_d}}{\left(\frac{T}{2t_d}\right)^2 - 1} \cos \pi \frac{t_d}{T} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{T}{2t_d} \right) \text{ untuk } t \geq t_d \quad (7.10b)$$



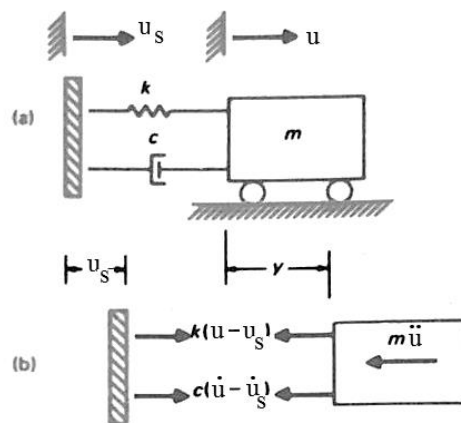
Gambar 7. 2 Spektrum respons setengah gaya sinusoidal dengan selang waktu t_d

Dapat dilihat dari Gambar 7.2 bahwa harga maksimum dari respons $\frac{u}{u_{st}} = 1,76$

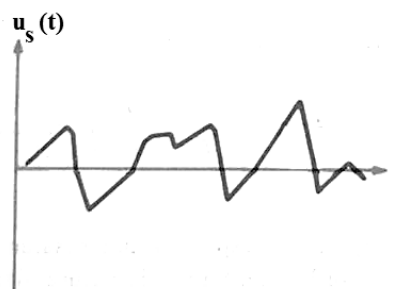
, yang didapat untuk pulsa khusus ini, bila $t_d/T = 0,8$.

7.2. Spektrum Respons Untuk Penyokong/Fondasi yang Tergantung/Bergerak

Sebuah osilator teredam yang merupakan model dari struktur seperti pada Gambar 7.3. Pengaruh pada kasus ini adalah fungsi percepatan yang dinyatakan pada Gambar 7.4. Persamaan gerak kita dapatkan dari menyamakan dengan nol jumlah gaya-gaya yang bersangkutan seperti pada diagram *Free Body* Gambar 7.3(b) yaitu:



Gambar 7. 3 Osilator sederhana teredam yang dipengaruhi pada penyokongnya.



Gambar 7. 4 Fungsi percepatan yang mempengaruhi penyokong dari osilator

Dengan mensubstitusi $\omega = \sqrt{k/m}$ dan $\xi = c/c_r$ ($c_r = 2\sqrt{km}$),

$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2u = \omega^2u_s(t) + 2\xi\omega\dot{u}_s(t) \quad (7.12)$$

Persamaan (7.12) adalah persamaan diferensial gerak dari osilator teredam dalam besaran gerak absolut. Formulasi yang lebih berguna dari masalah ini adalah menyatakan Persamaan (7.12) dalam besaran gerak relatif dari massa relatif terhadap gerak dari penyokong/fondasi, yaitu dalam besaran deformasi pegas. Perpindahan relatif u didefinisikan sebagai

$$U = u - u_s \quad (7.13)$$

Substitusikan ke dalam Persamaan (7.12) didapat

$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2u = -\ddot{u}_s(t) \quad (7.14)$$

Solusi Persamaan diferensial, Persamaan (7.14) didapat dengan metode yang telah dibahas pada bab terdahulu untuk solusi sistem berderajat-kebebasan-satu. Secara khusus solusi telah dapat dinyatakan dengan menggunakan integral Duhamel sebagai

$$u(t) = -\frac{1}{\omega_0} \int_0^t \ddot{u}_s(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau) d\tau \quad (7.15)$$

7.3. Spektrum Respons Dengan Tiga Besaran

Spektrum perpindahan S_D adalah perpindahan relatif maksimum yang selaras (proporsional) dengan spektrum percepatan S_a yaitu percepatan absolut maksimum.

Untuk membuktikan fakta ini, tinjau persamaan gerak Persamaan (7.11) dimana setelah menggunakan Persamaan (7.13) menjadi.

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \quad (7.16)$$

Untuk sistem teredam, dan

$$m\ddot{u} + ku = 0 \quad (7.17)$$

Pada harga maksimum, spektrum percepatan selaras dengan spektrum perpindahan, yang mana dari Persamaan (7.17) didapat

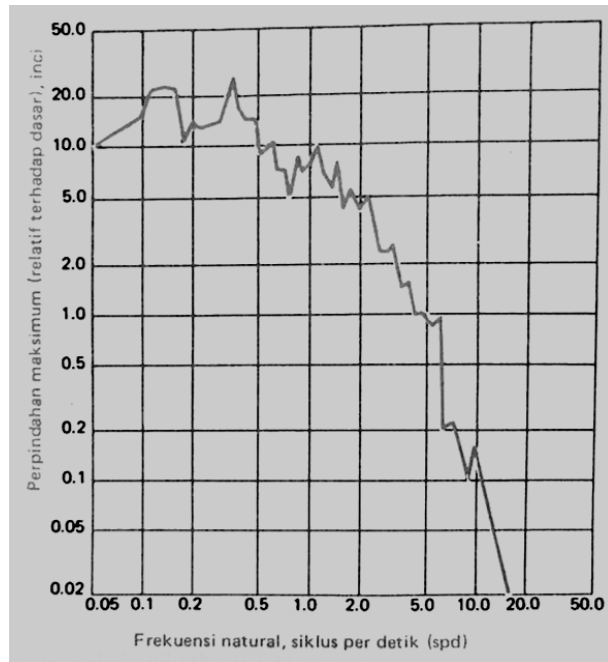
$$S_a = -\omega^2 S_D \quad (7.18)$$

Dimana $\omega = \sqrt{k/m}$ adalah frekuensi natural sistem, $S_a = \ddot{u}_{maks}$, dan $S_D = u_{maks}$

.

Persamaan (7.18) merupakan hubungan antara spektrum percepatan dan spektrum perpindahan, yang mana hubungan tersebut kebetulan sama untuk gerak harmonis sederhana. Tepatnya harga maksimum S_v didefinisikan sebagai spektrum kecepatan yaitu,

$$S_v = \omega S_D = \frac{S_a}{\omega} \quad (7.19)$$



Gambar 7. 5 Spektrum respons perpindahan akibat gempa di El Centro 1940

Untuk menyatakan bentuk diagram tiga besaran (*tripartite diagram*) seperti pada Gambar 7.5 kita tulis Persamaan (7.18) dalam besaran frekuensi natural f dalam siklus per detik (spd) dan mengambil harga logaritmanya, akan didapat

$$S_V = \omega S_D = 2\pi f S_D,$$

$$\log S_V = \log f + \log(2\pi S_D) \quad (7.20)$$

Untuk harga konstan S_D , Persamaan (7.20) adalah persamaan garis lurus antara $\log S_V$ dan $\log f$ dengan kemiringan 45° . Dengan cara yang sama dari Persamaan (7.19)

$$S_V = \frac{S_a}{\omega} = \frac{S_a}{2\pi f}$$

$$\log S_v = -\log f + \log \frac{S_a}{2\pi}$$

Untuk harga konstan S_a , Persamaan (7.21) adalah persamaan garis lurus antara $\log S_v$ dan $\log f$ dengan kemiringan 135° .

7.4. Spektrum Respons Kota-kota Indonesia Berdasarkan SNI 1726-2012

Menurut SNI 1726-2012 beban gempa untuk analisis spektrum respons ragam adalah parameter spektrum respons percepatan desain (S_a) sebagai fungsi periode getar struktur (T) yang digambarkan dalam suatu grafik spektrum respons. Parameter S_a bergantung pada lokasi gempa dan kondisi tanah. Kondisi tanah dibagi dalam 4 tipe yaitu: kondisi tanah lunak, tanah sedang, tanah keras dan batuan.

Grafik spektrum respons percepatan desain untuk setiap lokasi gempa dan kondisi tanah dapat ditentukan berdasarkan prosedur yang ditetapkan dalam SNI 1726-2012.

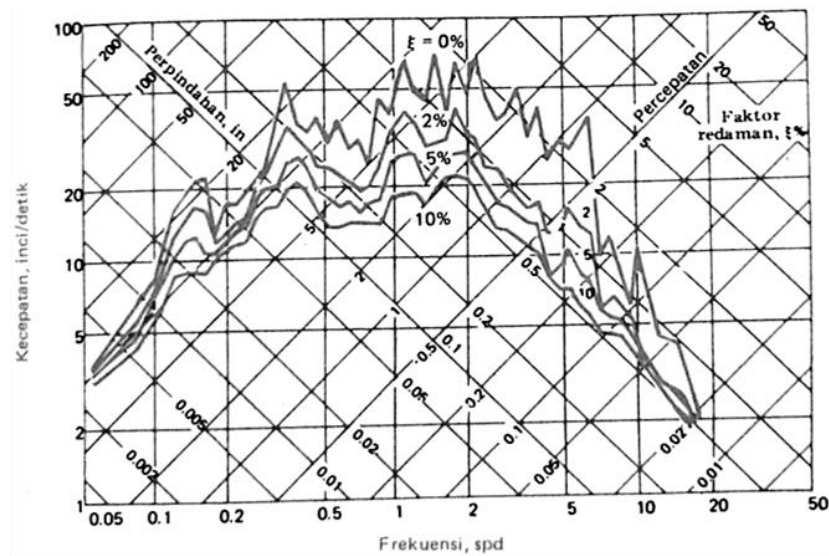
7.5. Contoh Soal dan Penyelesaian

Contoh 7.1

Struktur dengan model sistem berderajat kebebasan tunggal mempunyai periode natural $T = 1$ detik. Gunakanlah metoda spektrum respons untuk menentukan percepatan absolut maksimum, perpindahan relatif maksimum dan kecepatan palsu (*pseudovelocity*) relatif maksimum untuk (a) gerakan fondasi yang sama dengan

gempa El Centro 1940, dan (b) gempa rencana dengan percepatan tanah maksimum sebesar 0,32g. Dengan anggapan redaman sebesar 10% redaman kritis.

Berdasarkan spektrum respons pada Gambar 7.6 dengan $f = 1/T = 1,0$ spd, yang berhubungan dengan lengkung dengan tanda $\xi = 0,10$, terbaca pada tiga skala harga-harga sebagai berikut:



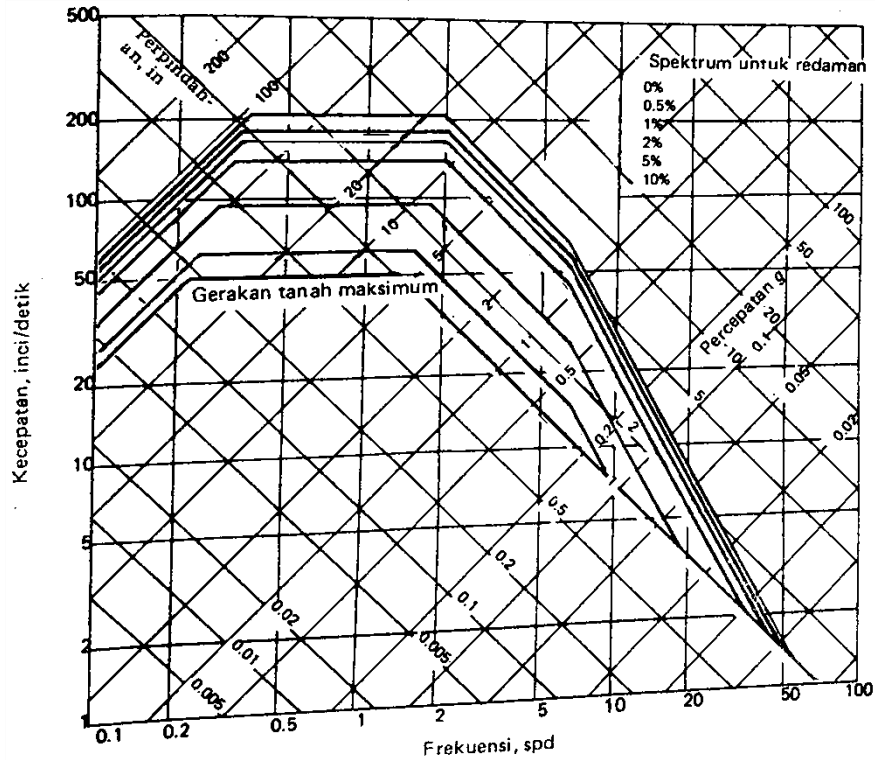
Spektrum respons sistem elastis untuk gempa El Centro 1940 :

$$S_D = 3,3 \text{ in}$$

$$S_v = 18,5 \text{ in/det}$$

$$S_a = 0,30 \text{ g}$$

Berdasarkan spektrum dasar rencana pada Gambar 7.8 dengan frekuensi $f = 1$ spd dan 10% redaman kritis, setelah koreksi kita dapatkan untuk percepatan tanah maksimum 0,32g akan kita dapatkan hasil sebagai berikut:



$$S_D = 9,5 \times 0,32 = 3,04 \text{ in}$$

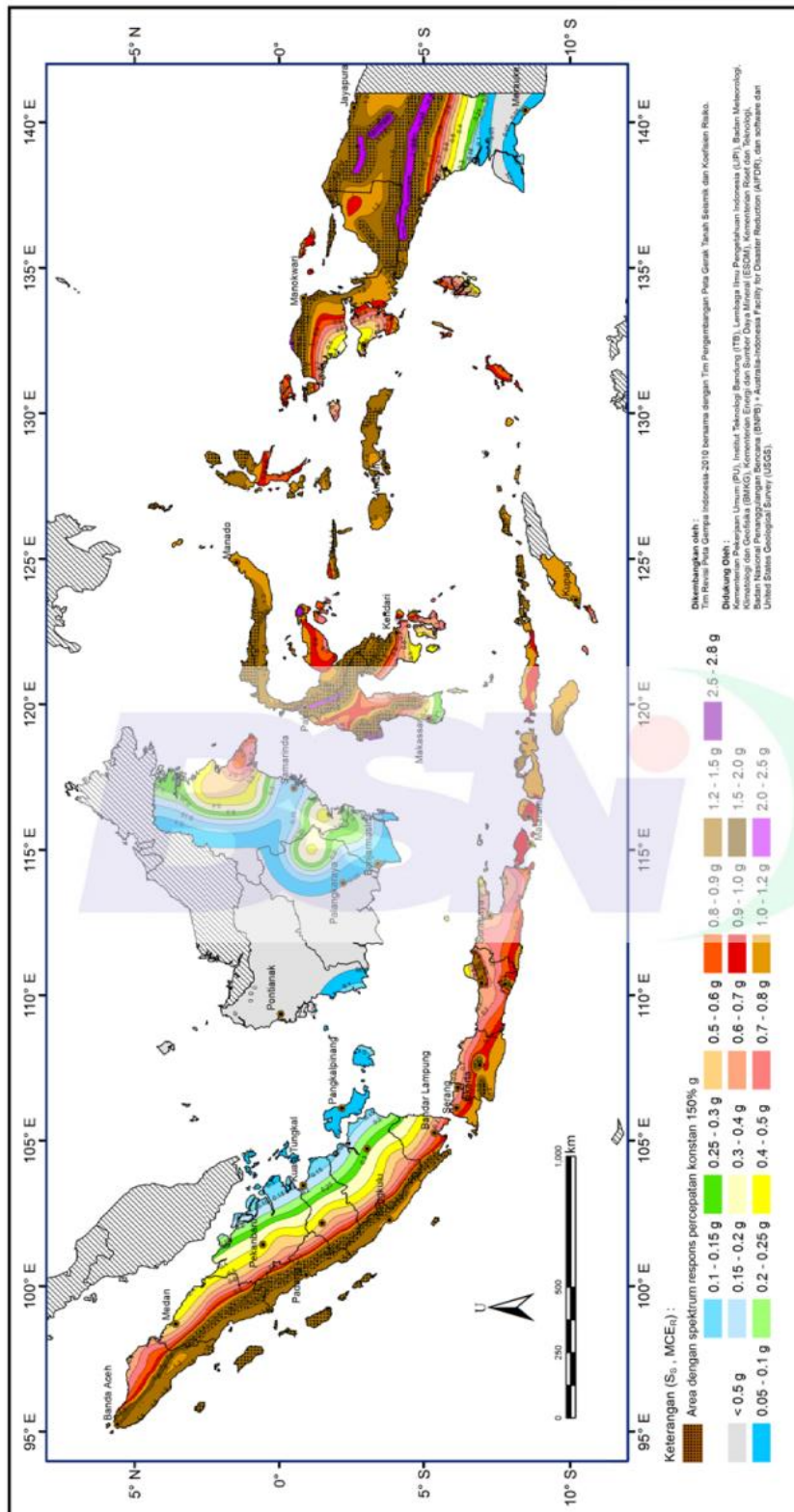
$$S_v = 60 \times 0,32 = 19,2 \text{ in/det}$$

$$S_a = 0,95 \times 0,32 \text{ g} = 0,304 \text{ g}$$

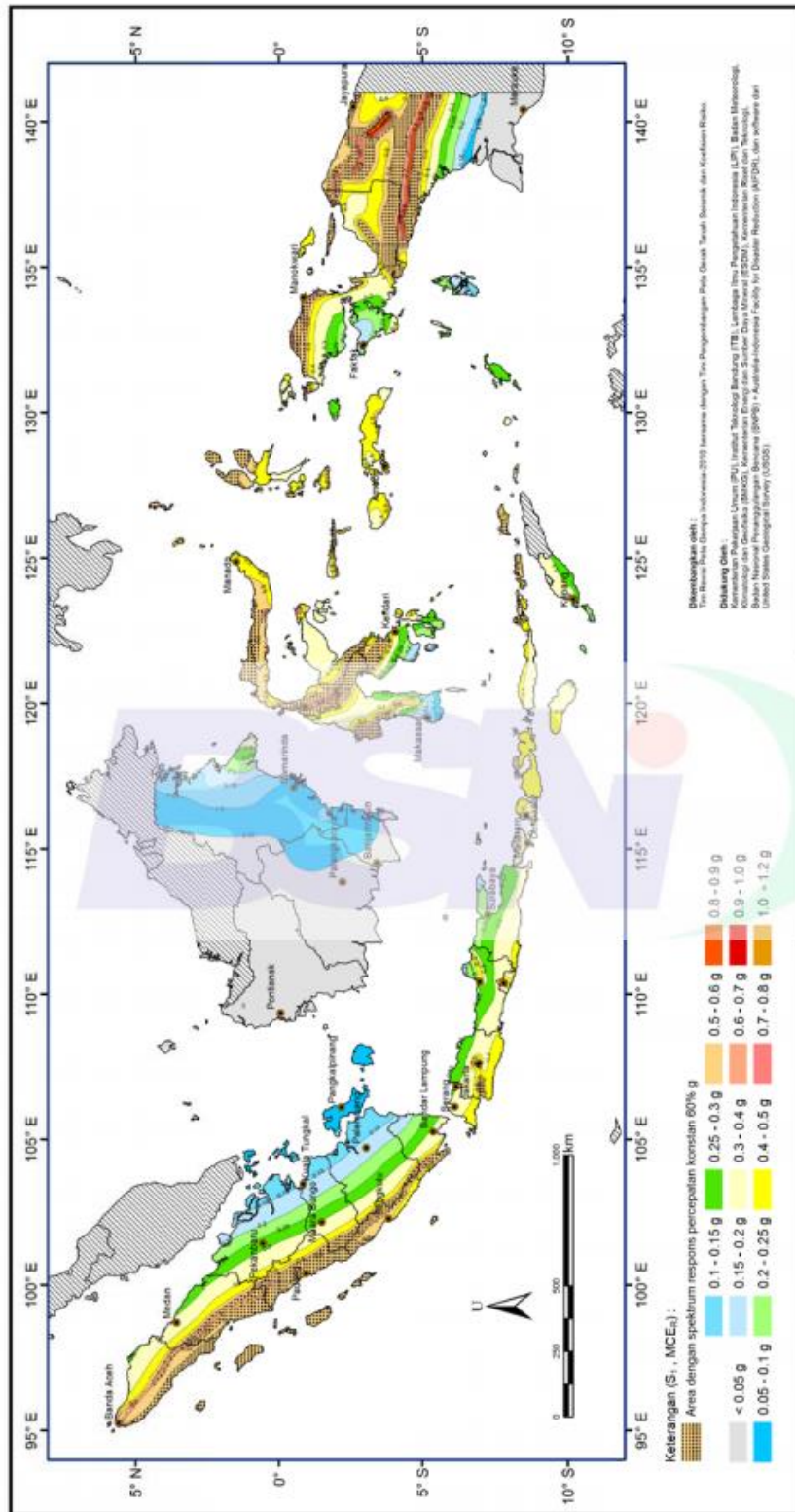
Contoh 7.2.

Dalam materi ini kita juga akan mempelajari contoh perhitungan grafik spektrum respons percepatan desain untuk Kota Banda Aceh dengan 3 kondisi tanah lunak, sedang, dan keras sebagai berikut:

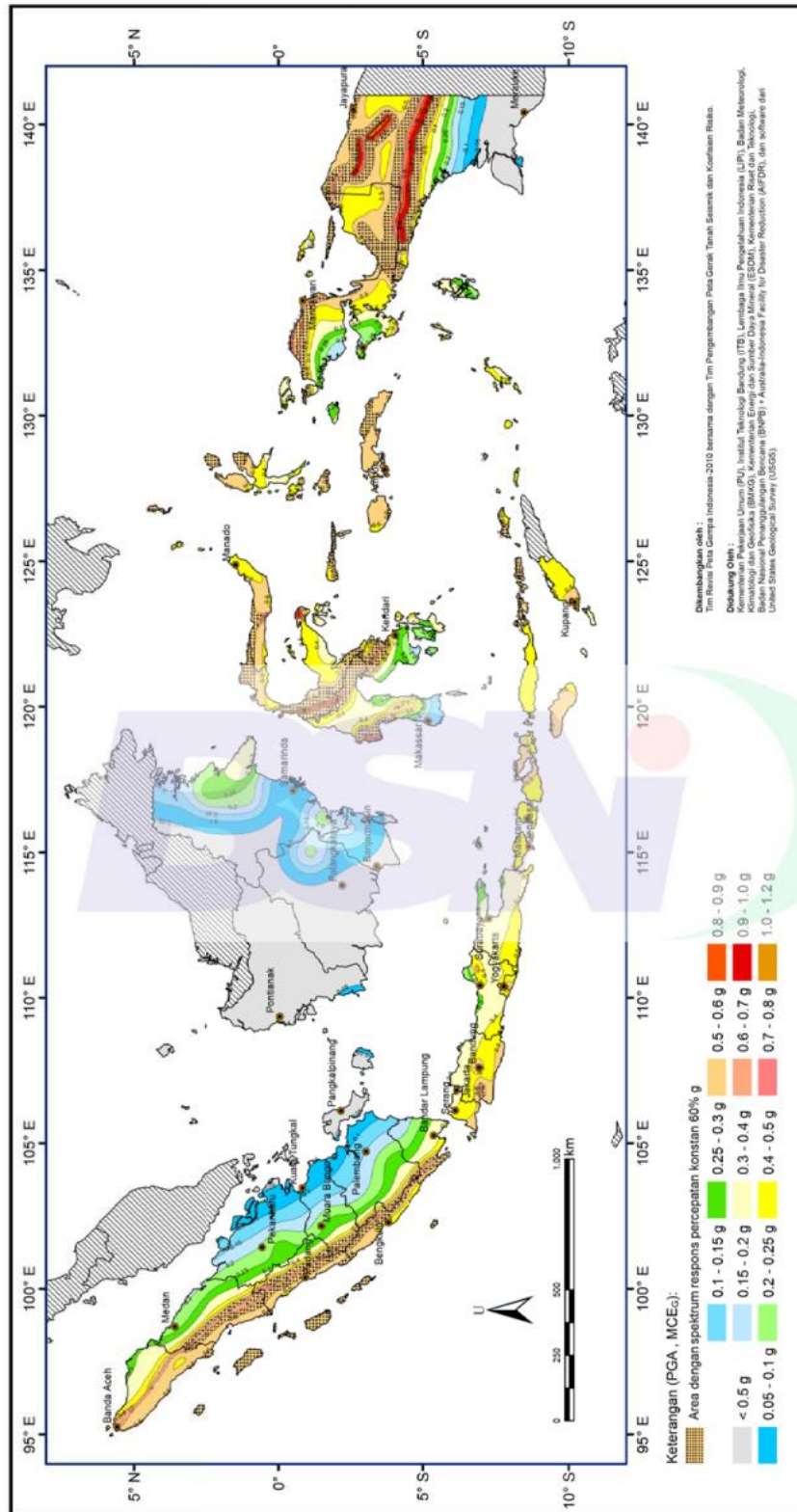
1. Menentukan spektral percepatan gempa MCE_R terpetakan untuk periode pendek (S_s) dan spektral percepatan gempa MCE_R terpetakan untuk periode 1,0 detik (S_1) dan parameter PGA berdasarkan Peta Gempa Indonesia pada Gambar 7.6, Gambar 7.7, dan Gambar 7.8. Dengan demikian untuk Kota Banda Aceh, diperoleh: $S_s = 1,349g$ $S_1 = 0,642g$



Gambar 7. 6 Parameter S_s , Gempa Maksimum (MCE_R), Kelas Situs SB



Gambar 7. 7 Parameter S_1 , Gempa Maksimum (MCE_R), Kelas Situs SB



Gambar 7. 8 Parameter PGA ,Gempa Maksimum (MCE_G), Kelas Situs SB

2. Menentukan kelas situs berdasarkan kondisi tanah.
 - a. Kelas situs untuk tanah keras adalah SC.
 - b. Kelas situs untuk tanah sedang adalah SD.
 - c. Kelas situs untuk tanah lunak adalah SE.
3. Menentukan koefisien situs F_a dan F_v berdasarkan kelas situs, S_s , dan S_I menggunakan Tabel 2.4 dan Tabel 2.5 yang terdapat pada SNI 1725-2012. Karena $S_s \geq 1,25g$ dan $S_I \geq 0,5g$, maka:
 - a. Untuk tanah keras (kelas situs SC), $F_a = 1,0$ dan $F_v = 1,3$.
 - b. Untuk tanah sedang (kelas situs SD), $F_a = 1,0$ dan $F_v = 1,5$.
 - c. Untuk tanah lunak (kelas situs SE), $F_a = 0,9$ dan $F_v = 2,4$.
4. Menghitung parameter spektrum respons percepatan pada periode pendek (S_{MS}) dan periode 1 detik (S_{M1}).
 - a. Untuk tanah keras:

$$S_{MS} = F_a S_s = 1,0(1,349g) = 1,349g$$

$$S_{M1} = F_v S_1 = 1,3(0,642g) = 0,835g$$
 - b. Untuk tanah sedang:

$$S_{MS} = F_a S_s = 1,0(1,349g) = 1,349g$$

$$S_{M1} = F_v S_1 = 1,5(0,642g) = 0,963g$$
 - c. Untuk tanah lunak:

$$S_{MS} = F_a S_s = 0,9(1,349g) = 1,214g$$

$$S_{M1} = F_v S_1 = 2,4(0,642g) = 1,541g$$
5. Menghitung percepatan spektral desain untuk periode pendek (S_{DS}) dan periode 1 detik (S_{D1}).
 - a. Untuk tanah keras:

$$S_{DS} = \frac{2}{3}S_{MS} = \frac{2}{3}(1,349g) = 0,899g$$

$$S_{D1} = \frac{2}{3}S_{M1} = \frac{2}{3}(0,835g) = 0,557g$$

b. Untuk tanah sedang:

$$S_{DS} = \frac{2}{3}S_{MS} = \frac{2}{3}(1,349g) = 0,899g$$

$$S_{D1} = \frac{2}{3}S_{M1} = \frac{2}{3}(0,963g) = 0,642g$$

c. Untuk tanah lunak:

$$S_{DS} = \frac{2}{3}S_{MS} = \frac{2}{3}(1,214g) = 0,809g$$

$$S_{D1} = \frac{2}{3}S_{M1} = \frac{2}{3}(1,541g) = 1,028g$$

6. Menghitung parameter T_0 dan T_s .

a. Untuk tanah keras:

$$T_0 = 0,2 \frac{S_{D1}}{S_{DS}} = 0,2 \frac{0,557g}{0,899g} = 0,124 \text{ detik}$$

$$T_s = \frac{S_{D1}}{S_{DS}} = \frac{0,557g}{0,899g} = 0,619 \text{ detik}$$

b. Untuk tanah sedang:

$$T_0 = 0,2 \frac{S_{D1}}{S_{DS}} = 0,2 \frac{0,642g}{0,899g} = 0,143 \text{ detik}$$

$$T_s = \frac{S_{D1}}{S_{DS}} = \frac{0,642g}{0,899g} = 0,714 \text{ detik}$$

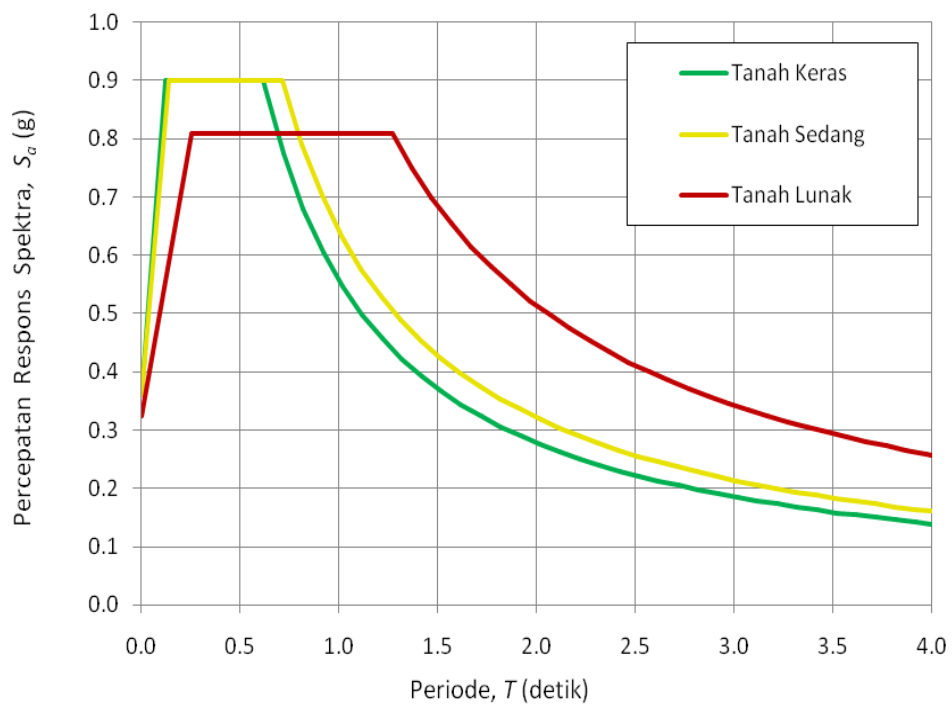
c. Untuk tanah lunak:

$$T_0 = 0,2 \frac{S_{D1}}{S_{DS}} = 0,2 \frac{1,028g}{0,809g} = 0,254 \text{ detik}$$

$$T_s = \frac{S_{D1}}{S_{DS}} = \frac{1,028g}{0,809g} = 1,270 \text{ detik}$$

7. Menghitung spektrum respons percepatan desain (S_a) menggunakan Persamaan 2.15, 2.16, dan 2.17 di SNI 1726-2012. Proses perhitungan parameter S_a dapat dilihat pada Tabel 7.1 dan kemudian dinyatakan dalam bentuk grafik seperti pada Gambar 7.9.

Gambar 7.9 menunjukkan respons percepatan struktur sebagai fungsi dari periode struktur untuk Kota Banda Aceh. Kota lainnya akan memiliki grafik spektrum respons yang berbeda karena memiliki tingkat risiko gempa yang berbeda.



Gambar 7. 9 Spektrum Respons Desain untuk Kota Banda Aceh

Tabel 7. 1 Perhitungan Parameter Percepatan Desain (S_a) Kota Banda Aceh

Tanah Keras		Tanah Sedang		Tanah Lunak	
T (detik)	S_a (g)	T (detik)	S_a (g)	T (detik)	S_a (g)
0,000	0,360	0,000	0,360	0,000	0,324
0,124	0,899	0,143	0,899	0,254	0,809
0,619	0,899	0,714	0,899	1,270	0,809
0,719	0,774	0,814	0,789	1,370	0,750
0,819	0,680	0,914	0,703	1,470	0,699
0,919	0,606	1,014	0,633	1,570	0,655
1,019	0,546	1,114	0,576	1,670	0,615
1,119	0,497	1,214	0,529	1,770	0,581
1,219	0,457	1,314	0,489	1,870	0,550
1,319	0,422	1,414	0,454	1,970	0,522
1,419	0,392	1,514	0,424	2,070	0,497
1,519	0,366	1,614	0,398	2,170	0,474
1,619	0,344	1,714	0,375	2,270	0,453
1,719	0,324	1,814	0,354	2,370	0,434
1,819	0,306	1,914	0,336	2,470	0,416
1,919	0,290	2,014	0,319	2,570	0,400
2,019	0,276	2,114	0,304	2,670	0,385
2,119	0,263	2,214	0,290	2,770	0,371
2,219	0,251	2,314	0,278	2,870	0,358
2,319	0,240	2,414	0,266	2,970	0,346
2,419	0,230	2,514	0,255	3,070	0,335
2,519	0,221	2,614	0,246	3,170	0,324
2,619	0,213	2,714	0,237	3,270	0,314
2,719	0,205	2,814	0,228	3,370	0,305
2,819	0,197	2,914	0,220	3,470	0,296
2,919	0,191	3,014	0,213	3,570	0,288
3,019	0,184	3,114	0,206	3,670	0,280
3,119	0,178	3,214	0,200	3,770	0,273
3,219	0,173	3,314	0,194	3,870	0,266
3,319	0,168	3,414	0,188	3,970	0,259
3,419	0,163	3,514	0,183	4,000	0,257
3,519	0,158	3,614	0,178		
3,619	0,154	3,714	0,173		
3,719	0,150	3,814	0,168		
3,819	0,146	3,914	0,164		
3,919	0,142	4,000	0,161		
4,000	0,139				

Untuk $T < T_0$:

$$S_a = S_{DS} \left(0,4 + 0,6 \frac{T}{T_0} \right)$$

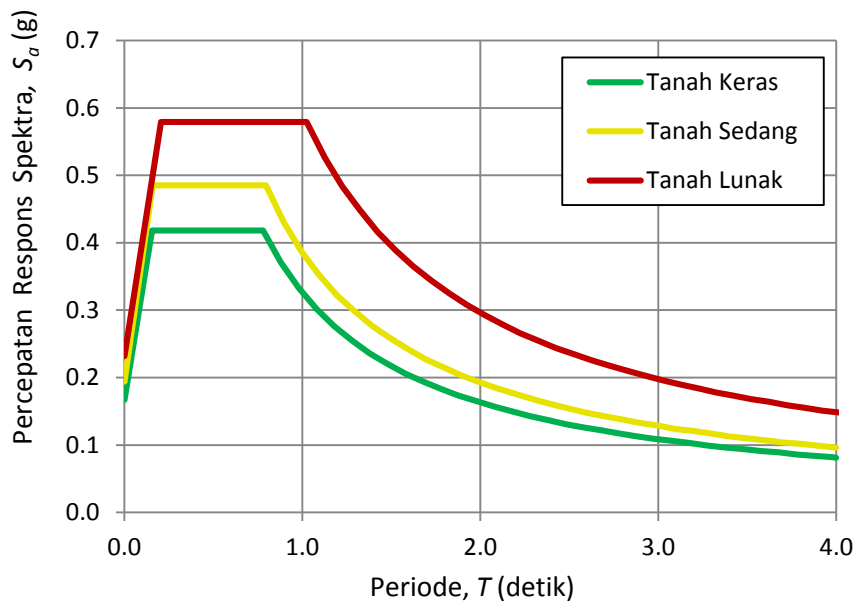
Untuk $T_0 \leq T \leq T_s$:

$$S_a = S_{DS}$$

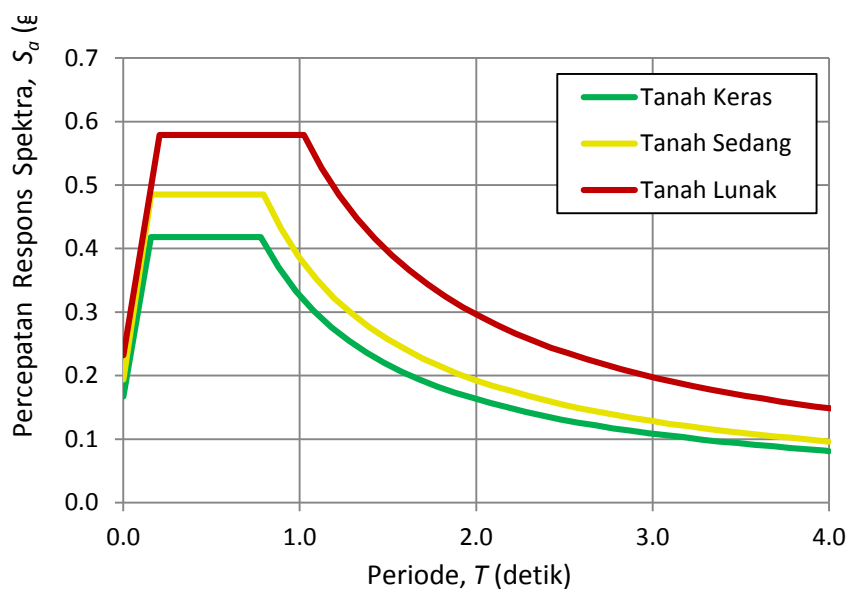
Untuk $T > T_s$:

$$S_a = \frac{S_{D1}}{T}$$

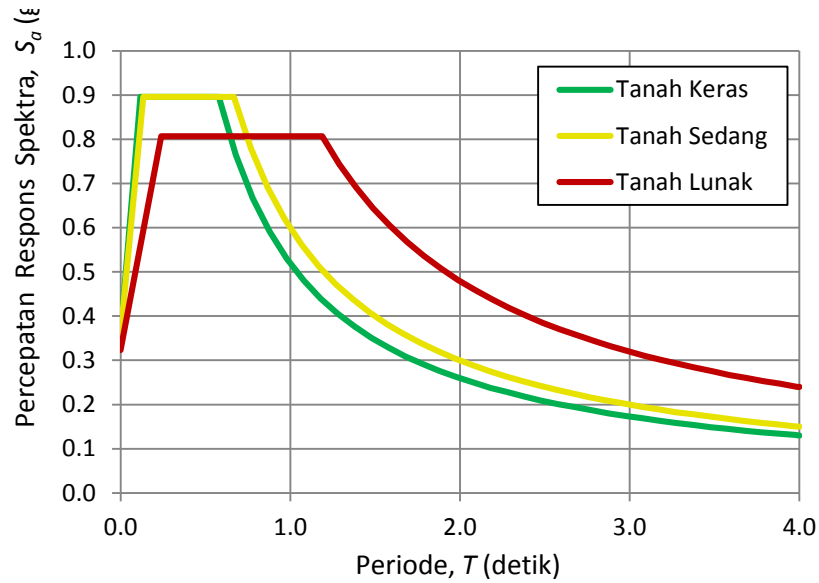
Untuk mempermudah pekerjaan, grafik spektrum respons desain diambil dari situs www.puskim.pu.go.id yang dapat mengeluarkan grafik spektrum respons yang persis sama dengan yang dihitung secara manual, seperti contoh perhitungan untuk Kota Banda Aceh. Grafik spektrum respons desain untuk beberapa kota lainnya di Pulau Sumatera dapat dilihat pada Gambar 7.10 , Gambar 7.11 dan Gambar 7.12.



Gambar 7. 10 Spektrum Respons Desain untuk Kota Medan



Gambar 7. 11 Spektrum Respons Desain untuk Kota Pekanbaru



Gambar 7.12 Spektrum Respons Desain untuk Kota Padang

7.6. Rangkuman

- Spektrum respons (*response spectra*) adalah plat respons maksimum (perpindahan, kecepatan, percepatan maksimum ataupun besaran yang diinginkan) dari fungsi beban tertentu untuk semua kemungkinan sistem berderajat-kebebasan-tunggal.
- Absis dari spektrum adalah frekuensi natural (atau periode) dari sistem dan ordinat adalah respons maksimum.
- Untuk menentukan respons dari suatu grafik spektrum untuk suatu pengaruh tertentu, diperlukan frekuensi natural dari sistem tersebut.
- Menurut SNI 1726-2012 beban gempa untuk analisis spektrum respons ragam adalah parameter spektrum respons percepatan desain (S_a) sebagai

fungsi periode getar struktur (T) yang digambarkan dalam suatu grafik spektrum respons.

- Parameter S_a bergantung pada lokasi gempa dan kondisi tanah. Kondisi tanah dibagi dalam 4 tipe yaitu: kondisi tanah lunak, tanah sedang, tanah keras dan batuan.
- Grafik spektrum respons percepatan desain untuk setiap lokasi gempa dan kondisi tanah dapat ditentukan berdasarkan prosedur yang ditetapkan dalam SNI 1726-2012.

7.7. Soal Latihan

1. Tentukan respon struktur bangunan perhotelan 10 lantai di Kota Bandung dengan jenis tanah sedang menggunakan software elemen hingga.
2. Tentukan respon struktur bangunan rumah sakit 5 lantai di Kota Padang dengan jenis tanah keras menggunakan software elemen hingga.

Daftar Pustaka

- Chopra, A. K. (2012). *Dynamics of Structures Theory and Applications to Earthquake Engineering*. (M. J. Horton, Ed.) (Fourth Edi). Boston: Prentice Hall.
- Hendra Sarfika. (2005). Simulasi numerik respon spektrum sistem derajat kebebasan tunggal di bawah beban dinamis, Tugas Akhir Program Studi S1 Teknik Sipil Universitas Riau.
- Mario, P. (1996). *Dinamika Struktur Teori & Perhitungan*. (H. Manahar, Ed.) (Kedua). Jakarta: Erlangga.
- Peraturan Pembebanan Indonesia. (1983).
- Rompas, G. H., Wallah, S. E., Windah, R. S., & Dapas, S. O. (2015). Kestabilan Solusi Numerik Sistem Berderajat Kebebasan Tunggal Akibat Gempa dengan Metode Newmark, 3(1), 1–7.
- SNI-1726-2012. (2012). *Standar Perencanaan Ketahanan Gempa Untuk Stuktur Bangunan Gedung*. Standard, Badan Standarisasi Nasional.
- Suryanita, R., Mudjiatko, & Sarfika, H. (2006). Respon Struktur Sistem Derajat Kebebasan Tunggal Akibat Beban Dinamis Dengan Pola Pembebanan Segitiga
- Suryanita, R., & Sarfika, H. (2007). Respons Struktur SDOF Akibat Beban Sinusoidal dengan Metode Integral Duhamel. *Jurnal Teknik Sipil Universitas Atma Jaya Yogyakarta*, 7(3), pp-266.
- Puri Awanda Cantikawati. (2016). Potensi Jaringan Saraf Tiruan Backpropagation Dalam Memprediksi Respon Sistem Multi Degree Of Freedom Akibat Pembebanan Dinamik. Tugas Akhir Program Studi S1 Teknik Sipil Universitas Riau.

GLOSARIUM

Amplitudo :

Simpangan maksimum yang terjadi pada setiap getaran

Derajat kebebasan struktur :

derajat kebebasan (independensi) yang diperlukan untuk menyatakan posisi suatu sistem pada setiap saat.

Frekuensi :

Banyaknya getaran yang terjadi dalam satu detik dengan satuan siklus per detik .

Perioda :

Waktu yang diperlukan untuk sistem bergerak 1 getaran.

Spektrum Respon :

Suatu spektrum yang disajikan dalam bentuk grafik atau plot antara periode getar struktur T terhadap respon-respon maksimum berdasarkan redaman dan gempa tertentu.

INDEKS

A

Amplitudo, 16, 18, 39, 40, 41, 42, 56, 57, 58, 60, 65

C

Chopra, 1, 4, 139, 146

D

Diagram free body (DFB), 9, 13

F

Frekuensi, 13, 14, 15, 35, 37, 38, 39, 52, 53, 58, 64, 80, 90, 205, 207

M

Massa, 1, 2, 3, 7, 61, 62, 66, 67, 86, 137, 152, 155, 161, 169, 186, 210

Mario Paz, 1

Multi Degree of Freedom, 128

P

Pegas k, 2, 3, 5, 6, 9, 11, 13, 33, 46, 62, 210

Perpindahan, 1, 7, 19, 38, 63, 67, 71, 78, 93, 102, 110, 113, 120, 148, 155, 177

Perioda, 14, 15, 30, 42, 73, 139, 145

R

Redaman (C), 1, 2, 3, 11, 33, 34, 35, 36, 57, 113, 187, 193, 214

Redaman liat (Viscous Damping), 32, 45, 59, 63, 87

S

Single Degree of Freedom (SDOF), 1, 2

Sistem tak teredam, 2, 35, 39, 78, 82, 87, 110, 112, 113, 116, 118, 119, 124

Penerbit
Universitas Riau Press

ISBN 978-979-792-712-7



9 789797 927127